量子連続測定と径路積分

増補版

M.B. メンスキー著
町　田　　茂訳

物理学叢書
71

吉岡書店

Continuous Quantum Measurements and Path Integrals

Michael B Mensky

P N Lebedev Physics Institute
Russian Academy of Sciences
117924 Moscow, Russia

Institute of Physics Publishing
Bristol and Philadelphia

私の両親

BM および VA メンスキーに

目　次

* 7.6，11.5，11.6 節は日本語版のために著者が追加したものである（訳者）。

第 9 章　作用不確定性原理 (AUP)

第 10 章　量子連続測定の群論的構造

第 11 章　径路と測定：新しい展開

日本語版への序文

量子力学のもっともエクサイティングな部分である観測理論(量子測定理論)は，最近，非常に注目されていますが，それは理論的重要性と実際的重要性の両方によるものです(実際的な重要性は現実の測定の精度が非常に上ったことによっています)。もっとも現実的なのは測定を連続過程として記述することであり，したがって，量子連続測定の理論は非常に現実的になりました。

この本で展開される制限径路積分(RPI)法はそのような型の測定を研究するにはもっとも有利な方法だと思われます。それはこの方法が測定装置(測定環境)の具体的な動力学的モデルを必要としないからです。RPI 法においては測定を，測定される系の状態あるいは発展について測定が与える情報によって，特徴づければ十分です。モデルからの独立性は量子連続測定についての一般的な性格の結論がこの方法によって得られることの理由でもあります。

多くの物理学者は径路積分形式に慣れていないので，RPI 法を適用することは難しいに違いないと思われるかも知れません。この点に関しては，量子連続測定の物理的分析にはまったく便利でありほとんど必要であるとはいえ，応用するときには径路積分を忘れてもよいことを注意しておきます。それは径路積分を制限することが系のハミルトニアンまたはラグランジァンに虚部を付け加えることによって表わせるからです。

制限径路積分は量子連続測定とは何であり，それは測定される系にどのよ

うに影響を与えるかを理解するのに適しています。考えている測定を記述する有効ハミルトニアンを選ぶのにそれは役立ちます（必要ではありません）。これらすべてに必要なのは径路積分の精神を理解することだけであって，洗練された技巧ではありません。そのあとではふつうの量子力学の方法（たとえばシュレーディンガーあるいはリウヴィル方程式）を，ただし複素有効ハミルトニアンをもって，使うことができます。

純粋に実用的な面に加えて，量子連続測定は量子力学のもっとも驚くべきもっとも重要な特徴を深く見通すことを可能にします。それらの特徴は現在でもまだ完全には理解されていません。その上，量子力学のそれらの特徴はこの理論全体のごく近い将来における新しい発展へと導くに違いないと私は考えます。多分，それらの発展は量子測定理論の理論的な面を必要とするでしょう。RPI 法とくに本書がこの方向の研究に役立つことを望みます。

数年前私の著書の一つ（Mensky 1983 a）が日本語に翻訳されました。日本に滞在していたとき，日本の物理学者たちの仕事机の上にその本があるのを見るのは喜びでした。1983 年の本の第 1 部は量子連続測定の RPI 理論の主な考え方とその簡単な応用を含んでいます。本書は本質的にその考え方を発展させたものであり，新しい応用をも与えています。本書が日本の同僚たちの役に立てば私は幸せであり，また彼らとさらに稔り多い共同研究ができることを望んでいます。

特に日本語版のために付け加えた部分があります。それは主に三つの節，11.5，11.6 および 7.6 節，です。そのほかいくつかの修正が行われています。

7.6 節は電磁場の測定可能性のより詳しい具体的な分析を与えており，それは測定可能性について RPI 法が与える制限とボーアとローゼンフェルトが古典的な論文で導いた制限との間の関係をいっそう明らかにしています。

この節は H. フォン・ボルツェスコフスキとの共著の論文にもとづいています。

11.5 節は RPI 法の正しさを示すいろいろな方法を論じており，それは次のものを含んでいます：ｉ) 著者が A. コネチニィと V. ナミオットとの共同研究で展開した連続測定の具体的なモデル，ii) RPI 法と無矛盾な歴史の方法との比較，iii) 数学的に厳密な定義のための制限径路積分の (制限されない径路積分に対する) 優位性。

11.5 節ではさらに開かれた系のもっと広い様相の中で RPI 法を論じ，実は次に述べる情報原理が連続測定の RPI 法と瞬間測定に対するフォン・ノイマンの射影仮説との両方の基礎にあることを論じます：すなわち，測定される系への測定過程の不可避の影響を見出すのに必要な唯一のものは測定される系の状態あるいは発展について測定が与える情報であります。

11.6 節では RPI 法のほかの二つの応用を簡単に調べます：ｉ) ウンルー効果 (加速されている観測者に対する真空の熱化) における非干渉化 (非量子化)，およびii) 量子カオス (古典カオス系の量子的性質)。第 1 の場合には非量子化から生じるウンルー効果の局在化を考えます。この研究は J. アウドレッチュおよび R. ミュラーとの共同研究で行われました。第 2 の場合には，力学系の規則的およびカオス的振舞いについての分類が，連続測定の古典および量子領域において，与えられます。これらの二つの応用はこの方法の質的に新しい可能性を現わすように思われます。

日本語版において (英語版に比べて) はるかに明瞭にされた重要な点が一つあります。それはガウス型重み汎関数の解釈とガウス型制限径路積分の乗法に関する性質です。この完全な明瞭さはコネチニィおよびナミオットと共同で行われた上述の研究の中でモデルの解析によって得られました。

この日本語版は町田茂教授によってはじめられたもので，すべての段階で

の彼の親切な協力がなかったら不可能だったでしょう。氏に心からの謝意を表わすことは私の大きな喜びです。

ミハイル　B. メンスキー

ドイツ，コンスタンツにて

1994 年 10 月 20 日

まえがき

“量子測定”というのは，“量子効果を考慮した測定”を意味する専門用語である。量子力学の始まりから現在にいたるまで，この話題は一般の人ばかりでなく専門家にとっても，大きな関心の対象でありつづけている。実際，この領域への関心は最近 10 年の間にいっそう増大した。

量子測定への関心は，その一番初めから，素粒子の位置と運動量を同時にかつ任意の精度で測定することの不可能性のような，風変りなパラドキシカルな特徴によって惹き起こされた。今日この関心は，理論的および実用的な理由の両方で，続いている。

実用的な観点からいえば，(重力波用アンテナの一部の位置の測定のような) マクロの測定でさえ非常に精密になって，量子効果を考慮することが必要になった。その上，ある場合にはこの効果は測定精度の主な制限を与える。

量子測定への変らないまた増大する関心の理論的な源泉は量子力学の基礎への一般的な関心と結びついている，測定の量子論 (量子力学における観測の理論) はその核心なのである。量子力学の原理を本当に洞察することは量子測定の理解なしには不可能である。

けれども，実用的な観点からいえば，多くの場合に，現実の系と過程の量子力学的記述のためには，量子力学の“深い理解”も量子測定をそれとして考えることさえも必要ではないことを言っておかなければならない。ただし，これが本当なのは，もっとも直接的な応用の狭い範囲に限られる。量子力学の第 1 原理に，あるいはそれを広く応用することにさえ，関心を持つ人は量子測定の問題に入り込むことを避けられない。

量子論は，急速な発展と適用領域の拡大をしつつあるので，量子力学の第

１原理は，現在特に重要である。科学の新しい方向としてわれわれの眼の前に開かれつつある，量子重力や量子宇宙論のような，量子力学の新しい領域においては，原理の問題が特にするどく提起される。また，新技術の開発は複雑な量子力学的問題にぶつかり，量子論の原理を深く理解することを要求する。

この本で扱うのは量子連続測定すなわち時間的にひろがった測定である。このような測定を記述するにはファインマンの径路積分がもっとも適した道具であることが分かる。ファインマンの方法では，われわれは量子系の発展を，あたかもそれが一つの点から別の点へと通過する径路に従うように，記述する。これは古典系とそっくりである。しかし，古典系では個々の径路がその発展の完全な記述であるのに対して，量子系では，すべての径路のある規則による和（積分）だけが発展を記述する。

系の発展の間にある連続測定を行うと，それは系が採る径路についてある情報を生じる。この場合には，和は，すべての径路についてではなく，その情報と矛盾しない径路についてだけ行われなければならないのは明らかである。これが量子連続測定に対する径路積分の方法のおもなアイデアである。このアイデアを数学的に展開すると具体的な物理的効果に対する式が得られる。

このアイデアの一つの明瞭な拡張は，量子力学系の連続測定から量子場の連続測定へと拡張することである。量子場の力学は場のすべての配位についての積分として表わされる（この積分もまた，しばしば，径路積分と呼ばれる）。連続的な（時間と空間の中に張られた）測定の下での同じ場の力学は，明らかに，その場の配位を，測定結果（データ）と矛盾しないものについて積分したもので記述される。

時間的に連続な（また空間的にも連続的な）測定の理論からどんな結論を導くことができるだろうか？　主なものは（よく知られた，状態に対する不確定性原理とは違った）過程に対する明確な不確定性原理である。この原理

は物理系の作用 $S[q]$ によって定式化できるので，作用不確定性原理と呼ぶことができる。系の歴史 $[q]$ を，連続測定によって，作用の不確定，δS，が作用量子 $\hbar$ よりも小さくない誤差をもって，跡づけることができることを，その原理は主張する。

このことは，それぞれの連続測定に対して，実際には，最高限度の正確さがあることを意味する。測定が最高限度のものより粗雑なときは，古典測定理論の予測どおりに，その測定は測定誤差のために有効性が落ちているのである。反対に，測定が最高限度のものより精密であるときは，その有効性は大きな量子ゆらぎ(量子測定雑音と呼んでもよい)のために落ちる。測定の最適範囲は古典領域と量子領域との境い目にあり，その誤差はある型の測定の精度に絶対的な制限を課す。この制限を乗り越える唯一の道はいわゆる量子非破壊(quantum nondemolition, QND)測定に属するものを選ぶことであって，それは量子領域を持たず，限界がまったく存在しない。

この一般的な言明の多くの具体的な適用を本書の中で述べる。それは振動子のある振動数成分の測定の感度から量子宇宙の，自己測定の帰結としての，時間の発生にまで及ぶ。理論の実用的な面も理論的な面もどちらも考察する。

この本は，主なアイデアを理解するのに，全部を読まなくてもよいようにつくられている。したがって，ある節あるいはある章の全部を飛ばすこともできる。理解を妨げずにそれが可能である場所では，そのことを注意してある。この本の最短の読み方は

第 1 章→第 4 章→……→第 11 章

である。第 5 ～10 章は読者が好みによって選べばよい。

この本の文献のリストは完全ではない。それは著者の研究で使われたものだけを含んでいる。いくつかのそれ以外の文献——主として本と総合報告であるが——が関連する話題のところで付け加えてある。しかし，その選び方はその問題を論じるに当っての著者の独自の見方によっている。その結果，多くの重要な本や論文が含まれなかった。それは，それらを含めると，問題

の別の観点からの考察が必要になり，それはこの本の枠内では難しかったからである。この不完全さを部分的に補うために文献に短い注を付けることを試みた。その目的は，量子測定理論の，この本で扱っていない領域についての感じを与え，その領域の文献の見当を与えることである。

V. B. ブラギンスキーは精密測定の理論，とくに量子測定理論の実際的な側面への私の関心を惹き起こしてくれた。V.N. ルデンコは，初めて，連続測定における量子効果を評価することの重要性を指摘した。これが私の研究の出発点であって，そこから量子連続測定の径路積分理論へと導かれたのである。私は，この問題についての私の最初の論文 (Mensky 1979 a) を面白いと考えてフイジカル・レビューに推薦してくれた K.S. ソーンに深く感謝する。私の共同研究者であり量子非破壊測定についての重要な論文の共著者である G.A. ゴルブツォワに私は多くを負っている。私はまた, C.M. ケイヴズ, H. ボルツェスコフスキ，R. オノフリオ，C. プレシラおよび他の多くの同僚たちと，いくつかの問題について，有益な討論を行った。

ミハイル　B. メンスキー

モスクワ，ロシア

1991 年 11 月 13 日

1．量子連続測定入門

この本の主なテーマは量子連続測定の径路積分理論である。この章ではこの理論の主な考え方を，定性的なレベルで，最少限の数学しか使わないで，示そう。

すべての物理系は本当は量子論的なのだが，そのあるものはある状況の下では近似的に古典論的に記述することができる。これは系の作用が知られるときの誤差に依存する（1.1節）。系を量子論的と考えなければならないときには，特定の量子論的な記述が必要であり，系の振舞いに特定の量子論的特徴が生じる。量子系としての記述の主な違いは確率振幅の概念であり（1.2節），量子系の主要な特徴は不確定性原理である（1.3節）。

不確定性原理のよく知られた形，$\Delta q \Delta p \gtrsim \hbar$，は瞬間的測定に適したものである。連続測定に対しては，作用を使って不確定性原理の修正を定式化することができる（1.4節）。この原理（そのもっとも簡単で弱い形）によれば，連続測定が生じる情報は作用の不確定が作用量子より小さくないもの，$\delta S \gtrsim \hbar$，である。

読者は第2，3章を飛ばしてこの章から直接第4章へ行っても理論の主な点の理解が妨げられることはない。第2章が必要なのは，瞬間的な量子測定のフォン・ノイマンの理論と量子連続測定の径路積分理論とを結ぶ環に特に興味を持つ人だけである（ただし，後者はまったく独立に展開できるし，事実，そうされる）。第3章は径路積分の数学的形式を第4章のレベルよりも深く研究するのに役立つ。

1.1 量子系と古典系

量子力学は，ミクロ系の運動が古典物理学の枠内では記述できないことが証明されたときに，ミクロの物体の理論として現われた。しかし，量子効果はマクロの物体に対しても重要なことがある。その実際の判定基準は，その運動を与えられた近似の枠内で記述する作用Sの典型的な値の不正確さにある。

作用Sは系の力学を特徴づける汎関数

$$S[q]=\int_{t'}^{t''}L(q,\ \dot{q},\ t)\mathrm{d}t$$

である。ここでLは系のラグランジァンであって，１次元力学系の場合には

$$L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(t,\ q)$$

という形をとる。

$$[q]=\{q(t)\,|\,t'\leq t\leq t''\}$$

は系の径路（軌跡）である。作用汎関数$S[q]$が古典系が実際にとる径路だけでなく，系の配位空間の中の任意の径路に対しても評価しうることが重要である。実際，非古典的な径路は量子力学において，とくに連続測定の理論において，決定的な役割をする。

系が量子的であるかどうかを判断するには，その作用を**プランク定数**，すなわち**作用量子** $\hbar=1.055\times10^{-27}$ エルグ・秒，と比べることが必要である。

この点をもうすこしはっきりさせよう。どんな系も，本当は，量子系である。しかし，ある近似での記述では，ある系の量子効果は無視できることがある。そのとき，この近似では，この系を古典系と考えてよい。

系の作用は，この点について，定量的な判定基準を与える。与えられた近似の特徴的な誤差が生じる作用 $S[q]$ の不確定さ ΔS が作用量子に比べて大きいならば（$\Delta S\gg\hbar$），系は古典系と考えてよい。もし作用 $S[q]$ がもっと小さい誤差で与えられるならば（$\Delta S\lesssim\hbar$），系を量子系として扱わなければならな

い。

1.2 振幅と可能事象

確率振幅は量子論と古典論との第1の違いを表わすから，ある見方からすれば，量子力学の主な目標は確率振幅である[1]。ある事象の**確率振幅**とは，この事象の確率が $p=|A|^2$ であるような複素数 A のことである。

量子力学は，量子系に対しては，確率でなく確率振幅を足し上げなければならないという点で，違っている。ある事象が二つの可能事象のチャネルを通って起こりうるとしよう。それらのチャネルに対する確率振幅を A_1 および A_2 とする。そのとき，考えている事象に対する確率振幅は

$$A=A_1+A_2 \tag{1.1}$$

であり，その確率は

$$p=|A|^2=|A_1+A_2|^2$$

である。

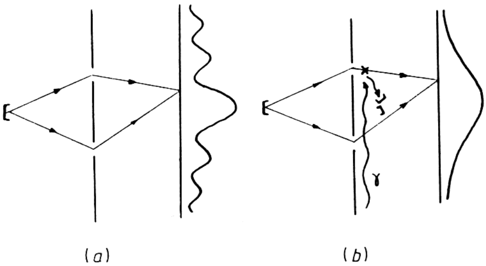


図1.1：二つのスリットの実験では，(a)粒子がどちらのスリットを通ったかが知られなければ干渉換様が生じるが，(b)どちらのスリットを通ったかを示す別の観測があれば干渉は生じない。

典型的な例は1個の粒子が不透明なスクリーン上の二つのスリットを通る場合である(図1.1)。そのとき，A_1 は粒子がスリットの一つを通る振幅であり，A_2 は粒子が他方を通る振幅である。この法則の結果として，一連の粒子

[1] Dirac (1972) は量子論のもっとも重要な違いは，作用素でなく，振幅にあると論じている。

が二つのスリットを通るとき，シンチレーション・スクリーンに干渉模様が現われる。この現象はたくさんの量子力学の教科書に述べられている (例えば Bohm 1952)。

けれども，式 (1.1) が成り立つのは，二つの可能事象のどちらが実際に起こったかを知る手段がないときにだけ限られる。このとき，**可能事象**は，ファインマンに従って，**干渉可能**といわれる。あるいは**量子可能事象**と呼んでもよい。

どちらの道を通ったかの情報を与える観測 (測定) がさらに行われたとすると，振幅の和の規則は確率の和の規則へと変る (Feynman and Hibbs 1965 を見よ)：

$$p = p_1 + p_2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 \quad 。$$

したがって，二つのスリットの実験でも干渉模様は生じない。例えば，光子の流れが不透明なスクリーンに当るとき，光子の散乱によって，二つのスリットのどちらを粒子が通ったか，わかる場合がそうである[2]。このような状況の可能事象をファインマンは**両立しない**と名づけた。**古典可能事象**という言葉を使うのも便利である。

振幅の和の規則は多者択一 (多数の可能事象の) チャネルに対しても，どのチャネルが実際に起こったかを見出す可能性がないならば，成り立つ：

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad 。 \tag{1.2}$$

ある観測 (測定) が行われて，実現したチャネルについて情報が与えられたとすれば，振幅の和の規則は修正しなければならない。修正の方法は測定によって与えられる情報に依存する。

情報が完全であって，実現したチャネルが正確に知られるかも知れない。そのときには，振幅のかわりに，別々のチャネルの確率を加えなければならない。

---

[2] もちろん，この場合，扱われている物理系がまったく違うのだということもできる。しかし，同じ系の余分な観測ということも同等に成り立つ。これは観測の量子論に典型的なことである：現実の世界のどの部分を系に，そして何を測定装置に含ませるかについては任意性がある。

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_n,\quad p_i=|A_i|^2 \quad 。$$

ほかの型の観測では，情報は部分的である。つまりその測定はより粗雑なのである。例えば，測定によって，実現されたチャネルの番号は次の組

$$(1,\ 2)\ ;\ (3,\ 4)\ ;\ \cdots\cdots(n-1,\ n)$$

の一つに属することがわかったとしよう(チャネル全体の数は偶数であるとしておく)。すると，別々の組に対応する確率を加えねばならないが，それぞれの組の中では，振幅を加えなければならない：

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_{n/2},\quad p_i=|A_{2i-1}+A_{2i}|^2 \quad 。 \tag{1.3}$$

この場合，最終の事象に対して，それぞれの組の中の可能事象は干渉可能(量子的)であるが，違う組のチャネルは両立しない(古典的)可能事象である。さらに粗雑な測定ではすべてのチャネルは三つ組に分けられる：

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_{n/3},\quad p_i=|A_{3i-2}+A_{3i-1}+A_{3i}|^2 \quad 。 \tag{1.4}$$

ここで p_i は測定の異なる結果(データ)に対する確率である。例えば式(1.3)の中の

$$p_i=|A_{2i-1}+A_{2i}|^2$$

の値は i 番目の組が測定の結果として生じる確率である。

$$A_{i\,\text{番目の組}}=A_{2i-1}+A_{2i} \tag{1.5}$$

の値は測定が i 番目の組によって表わされる結果を与える確率振幅にほかならない。もっと正確に言えば，これは，考えている事象が起こりそしてチャネルの組の測定が i 番目という結果を与えるための確率振幅である。

式(1.3)と(1.4)で表わされる状況は多くのスリットの実験で実現することができる。そのときには，不透明なスクリーンに当る光子の散乱によって，個々のスリットでなく，二つ組あるいは三つ組のスリットが区別できるようになっていなくてはならない[3]。

---

[3] このような実験を行って量子可能事象と古典可能事象を実験的に研究し，修正された振幅の加法則(1.3)と(1.4)を確かめることは重要である。

1.3 径路と連続測定

以上の議論は，量子可能事象と考えた**ファインマンの径路**に適用できる。粒子が点 q' から点 q'' へと動く振幅 $A(q'', q')$ は**伝播子**[訳注, 4]と呼ばれる。それは Feynman (1948) によって点 q' と q'' とを結ぶすべての可能な径路 $[q]$ に対応する振幅 $A[q]$ の和（というよりも積分）の形に表わされた：

$$A(q'', q') = \int A[q]\,d[q] \tag{1.6}$$

実際には，この式は，任意の量子系の配位空間での座標（あるいは座標の組）を q とすれば，その場合の伝播子に対しても成り立つ。ほとんどの議論には，1次元系を考えれば十分である。

式(1.6)は式(1.2)に似ている。ただし，径路が量子可能事象の役割をしている。また，前の議論と同じように，伝播子に対する式(1.6)は，粒子が q' から q'' へ動くときにどの径路を通ったかを知りうる可能性が無いときにだけ成り立つ。ところで，この遷移にともなって，ある**連続測定**が行われるとしよう。この測定のデータ α は遷移の径路についてある情報を与えるとする。その情報はある径路の集合 I_α で表わすことができる[5]。測定が結果（データ）α を生じるならば，遷移は集合 I_α に属する径路 $[q]$ の一つを通る。そのとき，式(1.5)と同様に，q' から q'' への遷移の振幅は I_α に属する径路についての積分として表わされる：

$$A_\alpha(q'', q') = \int_{I_\alpha} A[q]\,\mathrm{d}[q] \quad 。 \tag{1.7}$$

このように制限された径路積分を使うという考えは，Feynman (1948) の短い注の中で提案されている。この考えを仕上げる試みがいくつか行われたが（例えば Bloch and Burba 1974），成功しなかった。著者は，ファインマン

(訳注) propagator を伝播子と訳しておく。propagation function（伝播関数）と同じものである。

[4] 以下の章ではこの振幅を $U(q'', q')$ と書く。これは発展作用素 U と密接な関係があるからである。

[5] 実際，集合 I_α は測定データを十分に表現する。これが，測定データと対応する径路の概念を同一視し同じ文字 α で表わす理由である。

の上記の注とその後の試みを知らずに，この考えを提案し仕上げた (Mensky 1979 a，b，1983 a)。この本ではこの方法のいろいろな応用を考察する[6]。

連続測定の典型的な例は考える系の座標をモニターすることである (例えば，素粒子の位置をモニターすることを考えればよい)。そのとき測定は，測定の精度によってきまる誤差 Δa をもって，(ある時間間隔の中の) それぞれの時刻 t において，座標 $q(t)$ の値 $a(t)$ を与える。したがって，測定のデータ α を曲線 $a(t)$ によって表わされる径路 [a] と同定できる。

位置のモニターのデータ $\alpha=[a]$ を知れば，系の現実の径路 $[q]$ は $[a]$ から幅 $2\Delta a$ 以上は違わないことがわかる。したがって $[a]$ のまわりの幅 $2\Delta a$ の帯 I_α の中のどの径路 $[q]$ も可能であるが，(測定データ α を考慮すれば) ほかのどの径路も系の現実の径路としては不可能である。測定データ α が与える情報は，この場合，径路の帯 I_α によって表わされる。さらに，帯 I_α は測定データ α と同一視してよい。この帯は，測定の誤差についての情報も含んでいるから，位置のモニターの結果を径路 $[a]$ よりもよく表わしている (図 1.2)[7]。

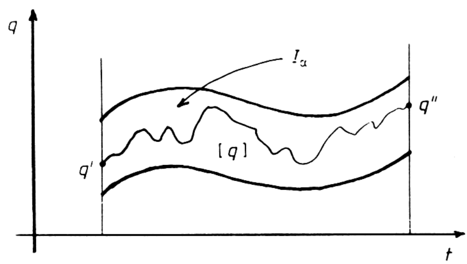


図 1.2：径路積分を帯 I_α に制限することは位置のモニターのデータ α を考慮に入れる。

式 (1.7) はこの本でのわれわれのすべての考察の基礎である。α を固定すると，振幅 $A_\alpha=A_\alpha(q'', q')$ は (与えられたデータの) 連続測定を受ける粒子

[6] 著者は，多分気付かないうちに，ファインマンの 1948 年の論文の影響を受けているのだと思う。
[7] ウィルソン霧箱 (キリバコ) の軌跡は位置の測定をモニターしたデータと考えることができる。その軌跡は有限の幅を持ち，多くの径路を含んでいる。

の伝播子と考えることができる。q'' と q' を固定するときは，同じ振幅を連続測定が結果 α を与える確率振幅と考えることができる。この振幅の絶対値の 2 乗をつくると，連続測定のいろいろなデータに対する確率が得られる。

もっと一般的なクラスの量子連続測定を式

$$A_\alpha(q'', q')=\int w_\alpha[q]A[q]\mathrm{d}[q] \tag{1.8}$$

によって記述することができる。ここで積分は点 q' と q'' を結ぶすべての経路について行われるが，汎関数 w_α が測定データ α に含まれる情報を表わす。この情報によって系は w_α が大きい径路を通る。$w_\alpha[q]$ が小さいほど，径路 $[q]$ を系が通る確率は小さい。

式(1.7)と(1.8)を任意の量子系と任意の連続測定に一般化することは簡単である。また，量子場の配位の測定に一般化することもできる。(後者の場合には測定は時間について伸ばされるだけでなく空間についても広げられるのでそれを**切れ目のない** (continual) 測定と呼ぶことができる。) これらすべての可能性を第 4 章以降で考察する。しかし，それに必要な理論をもっと詳しくもっと厳密に考察する前に，1.4 節で，主な結果の簡単な定式化を与えよう。

1.4 作用不確定性原理

量子力学と古典力学の予言の間の主なそしてもっとも刺激的な違いはハイゼンベルクの不確定性原理である。それは次のように定式化できる。(例えば粒子の) 位置 q と運動量 p を同時に測定するとき，測定のあとに残る不確定，Δq と Δp，は不等式

$$\Delta q \Delta p \gtrsim \hbar$$

をみたす。ここで $\hbar$ はプランク定数である。

不確定性原理は瞬間的な量子測定の特徴を表わすにはよいが，連続測定に対しては不便である。実際，例えば，測定が座標 q をある誤差 Δq の範囲でモ

ニターすることだとすると，それは運動量についてもある情報を考えるのだが，この情報を定量的に表わして不確定性原理を適用することは難しい。

したがって，連続測定に対して，不確定性原理に似た制限を求めなければならない。この本の主な目的はいろいろな連続測定に対する量子論的な制限を導くことである。すべての場合に，このような制限は式(1.7)の型の径路積分から導かれる。ここで，そのような計算の一般的な特徴のいくつかを分析し，連続測定に対する不確定性原理の予備的な定式を与えよう。

別々の径路の振幅 $A[q]$ はファインマンによれば(Feynman and Hibbs 1965 を見よ)

$$A[q]=e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}$$

である。ここで $S[q]$ は考える系の作用汎関数である。したがって径路積分(1.7)を

$$A_\alpha=\int_\alpha e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}d[q] \tag{1.9}$$

と書き直すことができる。ここで引数 q' と q'' を省略し，測定データ α を径路の対応する集合 I_α と同一視した。

値 A_α は測定が結果(データ) α を与える振幅と解釈することができる。それは，A_α の絶対値が大きいような測定データだけが起こりやすいことを意味する。もっとも起こりやすい測定データ α_{class} はいつでも古典軌跡 $[q]_{class}$ に対応する。しかし，量子効果の結果として，データは大きな確率をもつ α_{class} と違うことがある。われわれが求める不確定性原理は，α_{class} のまわりで起こりうる，測定データの全体を特徴づけるものでなくてはならない。それは測定データの，古典論が予言するものからの，ズレの尺度を与えるものと言える。

振幅(1.9)の形はその不確定性原理を作用汎関数 $S[q]$ によって表わすヒントを与える。この不確定性原理を**作用不確定性原理**(*action uncertainty principle*, AUP)と呼ぶのはこのためである。

AUP のいちばん簡単な形は

$$\delta S \gtrsim \hbar \tag{1.10}$$

である。この意味は次のとおりである。いちばん起こりやすい測定データα_{class}は古典論に，したがって，作用Sの極小値$S\min$に対応する。それにもかかわらず，作用の値がもっと大きいデータαも，Sと$S\min$との差が$\hbar$の程度までならば，やはり起こる。したがって，かなり大きな確率を持つ測定データαの集合にわたって作用汎関数Sの変分を計算しようとするときは，その変分δSは作用量子$\hbar$より小さくしてはならない。

注意　1　Δ(あるもの)は径路αの集合の限界の中でのある変数の変分をあらわす。δ(あるもの)はかなり大きな確率で起こるすべてのデータαの限界の中での変分をあらわす。したがって，Δは測定装置の誤差に結びついているが，δは測定データの変化を示す。

作用不確定性原理は，運動方程式と結びついた，別の形でも与えられる。量子論の領域では，理想的な測定データが古典論の運動方程式

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)}=0$$

をみたさず，$\delta S[q]/\delta q(t)$の値は0ではない。その値の0からの典型的なズレは式

$$\left|\int_{t'}^{t''}\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)}\Delta q(t)\,\mathrm{d}t\right|\simeq\hbar \tag{1.11}$$

によって見出される。ここで$[q]$は径路αの集合の中の中央の径路であり，$[\Delta q]$は径路をαから出さないような，すなわち$[q+\Delta q]\in\alpha$であるような，$[q]$の典型的なズレである。この式がみたされるときは，対応する測定データαは比較的高い確率で生じる。

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)}=\frac{\partial L(q,\ \dot{q})}{\partial q(t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q,\ \dot{q})}{\partial \dot{q}(t)} \tag{1.12}$$

は古典論の運動方程式の左辺だから，式(1.11)を象徴的に

$$\delta(\text{方程式})\,\Delta(\text{径路})\simeq\hbar$$

と書くことができる。このことから，古典描像からのズレは粗雑な測定（$\varDelta$（径路）が大きい）では重要でなく，精密な測定（$\varDelta$（径路）が小さい）では重要であることが分かる。量子論的な領域で行われる精密な測定は，実際に見られるように，系の非古典的な振舞いを生じる。

古典論の方程式の左辺（1.12）が0でないとき，この0でない値に等しい仮想的な力 $\delta F(t)$ が生じたということもできる。そのとき式（1.11）は

$$\left|\int_{t'}^{t''} \delta F(t) \varDelta q(t) \mathrm{d}t\right| \simeq \hbar \tag{1.13}$$

と書ける。

この原理の，典型的な状況での，定性的な帰結は以下のように述べることができる。

1．粗雑な測定（測定の誤差が大きく集合 α が広い）に対しては，古典論が予言する測定データだけが起こりやすい。
2．精密な測定（誤差が小さく集合 α が狭い）に対しては，古典論の予言から離れた測定データも起こりうる。測定が精密になるほど，起こりうる測定データの範囲は広がる。これは測定の量子領域である。
3．最適領域が測定の古典領域と量子領域の間にある。それより粗雑な測定は古典論的な測定誤差のために不十分である。それより精密な測定は測定の量子雑音のために不十分である。

精密な測定データの変化は測定の量子雑音と考えることができる。この雑音は精密な測定の妨げである。あるレベルの精度では雑音が主な妨げになる。精密測定の感度に対する量子論的な制限を克服しようとして，Braginsky et al (1977) はいわゆる量子非破壊 (quantum nondemolition，QND) 測定の概念を解明した (Braginsky 1977，Unruh 1979，Caves et al 1980 をも見よ)。実際，QND 測定に対しては測定の量子領域は存在しない。したがって，この場合，量子の閾値（しきいち）は存在せず，観測可能性の絶対制限は存在しない。QND 測定も径路積分の枠内で，とくに作用不確定性原理によって，考察する。

連続測定の上述の特徴は，作用不確定性原理(AUP)によって，第9章で導かれる。量子連続測定のいろいろな面を表わすほかの多くの方法も別の章で考察する。第4章より後のすべての章は，できるだけ，互いに独立なようにしてある。

2. 瞬間的で次々に行われる測定

連続測定を詳しく考察する前に，瞬間的な測定の理論の主な点を調べておこう。

多くの教科書に見られる標準的な理論を2.1節で簡単に提示したあと，2.2節では，いわゆる量子ゼノン・パラドックス（あるいは量子ゼノン効果）へのこの理論の興味ある応用に向かう。最後に，2.3節では，この形式を連続スペクトルを持つオブザーバブルの近似的な測定の場合に拡張する。それらの結果にもとづいて，一連の瞬間的な測定を考え，その極限としての連続な（時間について伸ばされた）測定を考察する。

これによってこの本の主な内容——量子連続測定——への移行が行われる。しかし，連続測定を一連の瞬間的測定の極限として記述することは非常に面倒であり，また実際は，不十分であることがわかる。以下の章では連続測定は，ファインマンの径路積分によって，ずっと簡単なしかたで導入される。われわれは連続測定を研究する主な道具として径路積分を使う。瞬間測定とその連続測定への結びつきにあまり関心がない読者がこの章を飛ばしてもよいのはそのためである。

2.1 量子系の測定

量子系の基本的な特徴はその測定が不可避的にその力学に影響することである。この反作用のよく知られた現われが不確定性原理であって，その議論は量子力学のどの教科書にもある。それによれば，1個の粒子あるいは任意の量子系の座標 q と運動量 p を同時に測定すると，その誤差 Δq と Δp は不

等式

$$\Delta q \Delta p \gtrsim \hbar \tag{2.1}$$

によって制限される。

もっと直接的には，測定の影響は測定される系の状態の変化に現われる。量子系への測定のこの反作用を記述する形式を考えよう。

2.1.1 フォン・ノイマンの理論

測定の前に，系は（規格化された）状態 $|\psi>$ にあるとしよう。$|\psi>$ は波動関数 $\psi(q)$ あるいは，もっと一般的には，状態のヒルベルト空間[1] Hのベクトルを表わす。あるオブザーバブルAを測定し，その可能な結果（データ）を a_i としよう。オブザーバブルAはHにおけるエルミート作用素であり，a_i はこの作用素の固有状態[2] $|a_i>$ にともなう固有値である：

$$A|a_i> = a_i|a_i> \quad 。\tag{2.2}$$

このとき，フォン・ノイマンの仮説によれば（von Neumann 1932)，測定は，確率 $p_i = |<a_i|\psi>|^2$ をもって，結果 a_i を与え，測定の後，系は状態 $|a_i>$ にある。数値

$$<a_i|\psi> = \int \overline{\psi_i(q)}\psi(q)\mathrm{d}q \tag{2.3}$$

（$\psi_i(q)$ は状態 $|a_i>$ に対応する波動関数である）は測定が結果 a_i を与えることの確率振幅と呼ばれ，その確率は確率振幅の絶対値の 2 乗で与えられる。状態 $|\psi>$ から状態 $|a_i>$ への系の遷移は状態 $|\psi>$の**収縮**と言われる。

$|\psi>$ が

$$|\psi> = \sum c_i|a_i>$$

の形に展開されるとき，i 番目の測定データに対する確率振幅は

$$<a_i|\psi> = c_i$$

---

[1] ヒルベルト空間とはスカラー積 $<\psi|\psi'>$ をもつ無限次元線型空間である。

[2] これらの固有状態は，Aがエルミート作用素であるために，互いに直交する（すべての固有値は異なるとしておく)。

[3] 上の形の $|\psi>$ の展開の可能性と振幅に対するこの式は，固有状態 $|a_i>$ がヒルベルト空間Hの直交規格化ベクトルの完全系（Hの直交規格化基底）を成すことから導かれる。

である[3]。

このことは射影子

$$P_i=|a_i><a_i|$$

を使って表わされる。測定は確率 $p_i=<\psi|P_i|\psi>$ をもって結果 a_i を与え，測定の後，系は状態 $P_i|\psi>$ にある。

もっと一般の場合には，測定は，完全性と直交性の条件

$$\sum_i P_i=1,\quad P_iP_j=0,\quad i\neq j \tag{2.5}$$

をみたすがそれ以外は任意の射影子[4] の集合 $\{P_i\}$ によって特徴づけられる。射影子 P_i に対応する測定結果（データ）は確率 $p_i=<\psi|P_i|\psi>$ をもって起こり，系の状態 $P_i|\psi>$ への収縮が起こる。

2.1.2 混合状態における測定

系の（測定前の）初期状態が密度行列 ρ によって特徴づけられる混合状態であるとしよう。どんな密度行列も，ある規格化直交ベクトル $|\phi_k>$ の集合と正の係数 s_k とによって

$$\rho=\sum_k s_k|\phi_k><\phi_k| \tag{2.6}$$

の形に表わせる。系が状態 ρ にあるとき，そのかわりに，系は状態 $|\phi_k>$ の一つに，確率 s_k をもって存在するということもできる。係数（確率）s_k は

$$\sum_k s_k=1$$

をみたし，これは密度行列の規格化条件

$$\mathrm{tr}\rho=1$$

と同等である。

状態 ρ にある系に対して，射影子の集合 $\{P_i\}$ によって特徴づけられる測定をするとしよう。i 番目のデータが確率 $p_i=\mathrm{tr}(P_i\rho)$ をもって得られ，系は状態[5]

---

[4] すなわち，$P_i^2=P_i$ であるようなエルミート作用素。

[5] p_i と ρ_i に対する式(2.6)とフォン・ノイマン仮説の純粋状態の定式から容易に導かれる。

$$\rho_i = \frac{P_i \rho P_i}{\mathrm{tr}(P_i \rho)}$$

に収縮する。この二つの主張は一つにまとめることができる：測定 $\{P_i\}$ は状態 ρ を状態

$$\rho' = \sum_i P_i \rho P_i \tag{2.7}$$

に変える。実際，この密度行列は

$$\rho' = \sum_i p_j \rho_i \tag{2.8}$$

の形に書ける。この展開は，

$$\mathrm{tr}\rho_i = 1 \qquad \text{および} \sum_i p_i = 1$$

とともに，状態の不完全な知識と解釈することもできる。系は状態 $\{\rho_i\}$ の一つにあり，状態 ρ_i の確率は p_i であると言ってもよい。

測定を密度行列 (2.7) によって記述することは，測定の結果としてどのデータが得られたか知られていないときに，便利である。この場合，測定は**非選択的**と言われる。非選択的な測定は，測定をしたがその結果を知らないときばかりでなく，式 (2.7) を使って測定に先立って計算するときにも，現われる。そのとき，測定データは原理的に知り得ないから，可能なデータのすべてを考慮に入れなければならない。選択的な測定と非選択的な測定との間には物理的なあるいは他のどんな**現実的な**違いも存在しない。違いは測定の記述のしかたにあるだけである。

上に述べたことに従って，状態 ρ の収縮は ρ_i の一つあるいは ρ' への転化と解釈できる。この二つの解釈は，実際，同等である。

2.1.3 非干渉化

ちょっと見ると，収縮の二つの理解のしかた——ρから ρ_i への転化と見るか ρ' への転化と見るか——の間には重要な違いがあるように見える。実際，ρ_i への収縮は測定の唯一の結果が現実に対応するとして選ばれることを意味するのに，ρ' は可能なすべての結果を含んでいる。しかし，系の終状態を

ρ' で記述することは，現実に選択が行われないことを意味しない。実際，測定が終るや否や，ある選択が行われている。可能なすべての結果が展開 (2.8) の中に存在することは知識の欠落を表わすものと理解しなければならない。測定が実際に行われたとすれば，そのときには ρ_i の一つが生じている。ある状況ではわれわれは数値 i を知らない。その場合でもわれわれはいろいろなデータの確率 p_i を知っている。そのような状況で状態を記述するには密度行列 ρ' によるのが最良である。

実際には，測定の過程における状態の収縮の重要な特徴は**非干渉化**，すなわち，異なる測定データに対応するベクトルの間の位相関係の破壊，である。これは純粋状態を使って分析するのが便利である。任意の混合状態 (2.6) は系の現実の純粋状態についての不完全な知識を記述すると解釈することができるので，この分析は，実際は，まったく一般的である。

作用素 A あるいは射影子 $P_i=|a_i><a_i|$ の集合 $\{P_i\}$ によって決められる測定を，もう一度，考えよう。系の（測定前の）始状態を $|\psi>$ とする。この簡単な場合には，射影子系の完全性と直交性 (2.5) は（エルミート作用素の固有状態の完全性と直交性を表わす）次の形

$$\sum_i |a_i><a_i|=1 \tag{2.9}$$

をとる。この関係を使うと，状態 $|\psi>$ を重ね合わせ

$$|\psi>=\sum_i |a_i><a_i|\psi>=\sum_i c_i|a_i> \tag{2.10}$$

として表わせる。ここで記号

$$c_i=<a_i|\psi>$$

が導入されている。

重ね合わせ (2.10) は複素係数 c_i の相対位相 $arg(c_i/c_{i'})$ がきちんと定義されているという意味で干渉可能である。同じ状態は密度行列の形では

$$\rho=|\psi><\psi|=\sum_{i,j} c_i\overline{c_j}|a_i><a_j| \tag{2.11}$$

と表わせる。状態 $|a_i>$ の重ね合わせが干渉可能であることは，ここでは，非対角 $(i\neq j)$ 項が和 (2.11) の中にあることによって表わされている。

測定が行われると収縮が(2.7)式に従って起こり，

$$\rho \longrightarrow \rho' \tag{2.12}$$

$$\rho' = \sum_i |c_i|^2 |a_i><a_i|$$

を生じる。この密度行列は，非対角項を含まない点で，ρ と決定的に違っている。したがって ρ' は状態 $|a_i>$ の干渉不能な混合であり，それらの状態の相対位相は定義されていない。収縮(2.12)は位相関係の破壊，すなわち**非干渉化**，に導く。状態 $|a_i>$ の干渉可能な重ね合わせはそれらの干渉不能な混合に変化する。

この同じ収縮の別の記述のしかたは非干渉化を違ったふうに表わす。われわれは，収縮の結果として，状態 $|\psi>$ は，確率 $|c_i|^2$ をもって起こる i 番目の可能事象の状態 $|a_i>$ の一つに変化する，ということができる。この定式では一つの状態しか生じないのだから，測定後の状態 $|a_i>$ の間の相対位相には意味がない。

非干渉化の物理的性格あるいはメカニズムについては困難な問題がある。測定とは何であり，測定装置とは何であるかもまた問題になる。装置をほかの物と区別する客観的な特質は何であり，装置と測定される系との相互作用をほかの型の物質系とそれらの間の相互作用から区別するのは何であるか？

これらの問題とそれに関連する諸問題はどれも難しく，まだ完全には解決されていない。測定装置のモデルを構成する試みに関心がある読者は，例えば，次の研究を読むとよい；Peres (1980 b)，Machida and Namiki (1980, 1984), Zurek (1981, 1982), Walls et al (1985), Joos and Zeh (1985), Zimányi and Károly (1986)，Fukuda (1987)，Maki (1988) および Unruh and Zurek (1989)。特に説得力があるのは測定装置と測定される系との間の相互作用が非干渉化を生じることの物理的描像を与えるズーレクの研究である。

量子測定の概念と測定における観測者の役割の理論的分析にさらに興味を持つ読者は量子力学のほとんどどの教科書を読んでもよい。例えば，Landau and Lifshits (1958)，Bohm (1952)，Dirac (1958)，Kaempffer (1965)，Piron

(1976), Blokhintsev (1982, 1987) などである。また，量子測定に関するたくさんの研究のどれかを読んでもよい。例えば von Neumann (1932), Wigner (1968), d'Espagnat (1976, 1983), Everett (1957), Wheeler (1957), DeWitt and Graham (1973), Zeh (1988 a), Squires (1988), Rietdijk (1987) などである。

ここではこの問題には，これ以上，深入りしない。しかし，量子測定による収縮の帰結のもっとも興味をそそる例の一つ，いわゆる量子ゼノン・パラドックス，を分析することは有益と思われる。

2.2 量子ゼノン・パラドックス

よく知られているように，古典的なゼノンのパラドックスは，時間は別々の瞬間から成っており，矢はどの瞬間にも一定の点に存在するから，矢は飛ぶことができないというものである。言いかえれば，矢がそれぞれの瞬間に一定の位置にあることが矢の飛行 (運動) を禁止する。Misra and Sudarshan (1977) は次の主張に '量子ゼノン・パラドックス' という名前を与えた：量子系を短い時間間隔で (極限では連続的に) 測定すると，その系の別の状態への遷移が禁止される。言うまでもなく，この主張は，古典的なゼノンのパラドックスが哲学的な根拠にもとづいて述べられたのと違って，量子力学から導かれた。

このパラドックス，というよりは効果，は注目をひき，次のようないくつもの論文で論じられた：Chiu et al (1977), Ghirardi et al (1979), Peres (1980 a), Joos (1984), Kraus (1981), Home and Whitaker (1986) および Castrigiano and Mutze (1984)。文献によっては，この現象は**番犬効果**という別の名前をつけられている。

ここでは，量子ゼノン効果の理論とその存在を確かめる実験を簡単に述べる。

ゼノン効果への関心は，その効果の次のような定式と結びついている：崩

壊の連続測定は崩壊を禁止する。この定式が成り立つかどうかは疑わしく，その上，いずれにせよ，いまのところ，それは実験的に検証され得ない。しかし，一つの量子準位から他の量子準位への誘導遷移が連続観測によって禁止されることは，離散スペクトルを持つ系に対する，この理論の帰結である。実験的に検証されたのはこの種のゼノン効果である。それを簡単に考えてみよう。

2.2.1　量子ゼノン効果の理論

系は初め ($t_0=0$ の瞬間に) 状態 $|\psi_0>$ にあり，$t_i-t_{i-1}=\Delta t$ であるような瞬間 t_1，t_2，…… に測定されるとする。時間間隔 T の間に N 回の測定が行われ，したがって，$\Delta t=T/N$ であるとする。われわれは系の発展に対するそれらの測定の影響を調べる。$N\to\infty$，すなわち $\Delta t\to 0$，にすると，連続測定の発展への影響について判断することができる。この極限でゼノン効果が起こるはずである。

測定は二つの射影子 $P_0=|\psi_0><\psi_0|$ と $P_1=1-P_0$ の組によって記述される。簡単のため，系には $\psi_0>$ に直交する状態は一つ，$|\psi_1>$，だけあると仮定してよい。すると，どの測定も次の質問に答えるものである：系は二つの状態のどちらにあるか？そのような測定に対しては可能なデータは二つであり，それに数 0 と 1 を与える。データ 0 は系が状態 $|\psi_0>$ にあることが見出されることを意味する。フォン・ノイマンの収縮仮説 (2.1.1 節) によれば，このとき，測定後の系の状態は $|\psi_0>$ である。測定のもう一の可能なデータは 1 である。これは，系が状態 $|\psi_1>$ にあることが見出されることを意味する。そして，系は，測定後，実際この状態にある (この状態に収縮している)。

測定の二つのデータの確率を知るためには，測定の直前の系の状態を知らなければならない。この状態は，二つの測定の間の，系の自由な発展によって生じる。

時刻 $t_0=0$ において系は状態 $|\psi_0>$ にあり，時間間隔 $[t_0,\ t_1]=[0,\ \Delta t]$ の間，系は自由に (測定されずにその固有の法則に従って) 発展するとしよう。

この（シュレーディンガー方程式に支配される）発展を重ね合わせ

$$|\psi(t)>=c_0(t)|\psi_0>+c_1(t)|\psi_1> \tag{2.13}$$

によって記述しよう。ここで $c_0(0)=1$，$c_1(0)=0$ である。すると時刻 Δt において行われる測定は，確率 $p=|c_1(\Delta t)|^2$ をもってデータ 1 を与え，確率 $q=1-p=|c_0(\Delta t)|^2$ をもってデータ 0 を与える。数値 p は，しばしば，時間 Δt の間の自発遷移 0→1 の確率と呼ばれる。

初状態が $|\psi_1>$ だと，その発展は重ね合わせ

$$|\psi'(t)>=d_0(t)|\psi_0>+d_1(t)|\psi_1>$$

で記述される。ここで $d_0(0)=0$，$d_1(0)=1$ である。すると時刻 $t_1=\Delta t$ における測定の結果（データ）0 と 1 は，確率 $|d_0(\Delta t)|^2$ と $|d_1(\Delta t)|^2$ をもって，それぞれ，生じる。これらの確率は前と同じ数で表わされる[6]：$|d_0(\Delta t)|^2=p$，$|d_1(\Delta t)|^2=q=1-p$。

したがって，もし状態が時刻 $t_0=0$ に $|\psi_{i_0}>$ にあったとすれば，時刻 $t_1=\Delta t$ における測定データ i_1 の確率は $i_1\neq i_0$ に対して p，$i_1=i_0$ に対して $q=1-p$ である。測定の後，（収縮によって）系は状態 $|\psi_{i_1}>$ にある。次に，時間間隔〔t_1，t_2〕=〔Δt，$2\Delta t$〕の間の自由な時間発展と時刻 t_2 における測定についてすべて同じことのくり返しが起こる。時刻 t_2 において，時刻 t_1 と同じ結果を得る確率は $q=1-p$ であり，反対の結果を得る確率は p である。

すべてが次から次へとくり返されることは明らかである。したがって引き続いて行われる測定は i_0，i_1，i_2，…，i_N という結果を確率

$$P(i_0,\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_N)=p_1p_2\cdots p_N$$

をもって与える。ここで，$i_n\neq i_{n-1}$ ならば $p_n=p$，$i_n=i_{n-1}$ ならば $p_n=q=1-p$ である。測定によって系が k 回変り $(N-k)$ 回変らなかったとすれば，この積は

$$p^kq^{N-k}$$

である。

---

[6] 直交状態 $|\psi_0>$ と $|\psi_1>$ が，ユニタリーな発展によって $|\psi>$ と $|\psi'>$ になるので，後者も直交しているためである。

簡単な計算によって，終状態が始状態と同じ場合，$i_N=i_0$，(および違う場合，$i_v\neq i_0$) に対する確率は

$$P\begin{pmatrix}\text{同じ}\\ \text{違う}\end{pmatrix}=\sum_{k\,\text{偶}\atop\text{奇}}\binom{N}{k}p^k q^{N-k}$$

である。ここで和は 0 とNの間のすべての偶 (あるいは奇) 数について行われる。この二つの確率の一番目のものは元の状態が生き残る確率と言ってよい。

元の状態が生き残る確率の式の中で最初の 2 項だけをとると，近似的に

$$P_{\text{surv}}=P(\text{同じ})=(1-p)^N\left[1+\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right]$$

である。カッコの中の第 2 項が第 1 項よりもずっと小さければ，ほかのすべての (省略された) 項はさらにずっと小さい。この場合，第 1 項だけが重要であって

$$P_{\text{surv}}=(1-p)^N\quad。\tag{2.14}$$

これはpが小さいだけでなく不等式

$$p\ll\frac{1}{N}\tag{2.15}$$

をみたす場合である。

時間間隔 $[t_0, t_N]=[0, T]$ の間にN回の測定が行われ，したがって $\Delta t=T/N$ であるとしよう。もし，十分小さな Δt に対して自発遷移 0→1 の確率が Δt について 2 次であるならば

$$p=\lambda^2\Delta t^2=\left(\frac{\lambda T}{N}\right)^2$$

と書くことができ，不等式

$$N\gg(\lambda T)^2$$

がみたされる。この場合，式 (2.15) が成り立ち，式 (2.14) を使うことができて

$$P_{\text{surv}}=\left(1-\frac{(\lambda T)^2}{N^2}\right)^N=e^{-\lambda^2T^2/N}$$

となる。

測定を連続的と考えることができる $N\to\infty$ の極限では，この確率は1に近づく：

$$\lim_{N\to\infty} P_{\mathrm{surv}}=1$$

このことは，測定が行われなければ有限な確率で起こる遷移 0→1 が，連続観測(測定)によって禁止されることを意味する。これは，まさに，**量子ゼノン効果**と呼ばれるものである。

この結果を導いた条件は，小さい時間間隔の間の，自発遷移 0→1 の確率がこの間隔について2次，$p\sim(\Delta t)^2$ であることである。確率の時間依存性が1次だと禁止(量子ゼノン効果)は起こらないことが示される。

不安定状態の崩壊に対して量子ゼノン効果を観測することが困難(あるいは不可能)である理由はこのためである。要するに，自然崩壊の典型的な法則は指数法則

$$p(t)=1-e^{-\lambda t}$$

であって，小さな時間に対しては1次の時間依存性，$p\sim\Delta t$ を与えるのである。

崩壊する不安定(準安定)状態のエネルギーをEとするとき，非常に小さな時間，$\Delta t\lesssim\hbar/E$，に対しては，崩壊の指数法則は破れているかもしれないということは本当である。したがって，形式的には，もし観測を $\hbar/E$ よりも小さい間隔でくり返せば，ゼノン効果が起こりうると結論することができる。

けれども，この間隔は非常に短い(アルファ崩壊では 10^{-21} 秒)ので，これは技術的に不可能である。その上，そのような測定は，原理的に，ほとんど実現可能性がない。実際，精度Eでのエネルギーの保存は，測定の時間間隔が $\hbar/E$ より小さいか同程度だと，保つことができない。これはボーア-ハイゼンベルクの不確定性原理[7]

$$\Delta E\Delta t\gtrsim\hbar$$

[7] ただし，この原理に反対する論文もある(例えば Vorontsov 1981 を見よ)。エネルギーと時間の不確定性原理は，測定を以下に述べる狭い意味に限るときにだけ成り立つように思われる。それは，測定前のあるオブザーバブルについて情報を与えるだけでなく，このオブザーバブルが測定の全時間を通じて実際に同じ値を持つことを保証するような測定である。

の帰結である (Landau and Lifshits 1958 を見よ)。しかしエネルギーが精度 E で保存されなければ，系が元の不安定状態にあるか否かという質問は無意味になり，要求されるような型の測定は不可能である。

これが，量子ゼノン・パラドックスが，自然崩壊でなく，二つの原子準位の間の誘導輻射に対して実験的に確認された理由である。後者では，測定がないときの遷移確率は 2 乗の時間依存性を持つのである。

2.2.2 実験的検証

量子ゼノン効果の検証のためのいろいろな実験が提案されている。Cook (1988) は三つの準位を持つ系 (磁場にトラップされたイオン) での実験を提案し，これはその後行われた。実験のアイデアは以下に示すものであった。

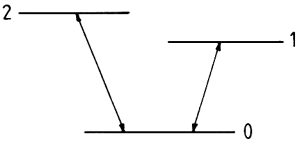


図 2.1 ゼノン効果の検証のための 3 準位系，系が準位 0 にあるか準位 1 にあるかをくり返し観測するとそれらの間の遷移が起こりにくくなる。準位 2 は観測に必要である。

系の二つの準位 E_0 と E_1 (図 2.1) が 2.2.1 節の状態 $|\psi_0>$ と $|\psi_1>$ の役割をする。これらの状態の間の遷移は共鳴振動数 $\omega_1=(E_1-E_0)/\hbar$ を持つ輻射によって誘起される。状態 E_0 と E_2 の間の遷移は系の状態の測定に使われる：$\omega_2=(E_2-E_0)/\hbar$ での輻射の共鳴散乱を観測すれば，系が状態 E_0 にあることを結論することができる。

準位 1 から準位 0 への自然崩壊の確率は無視できると仮定する。0−1 共鳴輻射の影響によって準位 0 と 1 との (2.13) の型の干渉可能な重ね合わせができ，その係数 c_0 と c_1 は

$$p(t)=|c_1(t)|^2=\frac{1}{2}(1-\cos\Omega t) \tag{2.16}$$

となるようなものである。ここで Ω は，作用させた共鳴輻射の振幅に比例する，いわゆるラビ振動数である。Δt が小さいとき，確率

$$p(\Delta t)=\frac{1}{4}\Omega^2\Delta t^2$$

が時間について 2 次であることが重要であり，したがって，ゼノン効果が起こるはずである。

提案された実験では準位 2 から準位 0 への遷移は許されており，準位 2 は準位 0 へだけ崩壊できる。0－2 共鳴輻射の強いパルスを系に当てると，このパルスは 2.2.1 節の射影子 P_0 と P_1 に対応する測定として働いて，系の状態を状態 0 または 1 の一つに収縮させる。もし系が状態 0 にあれば，状態 2 への遷移が (振動数 ω_2 の)共鳴輻射の作用によって誘起され，つづいて状態 0 に自然崩壊によって戻る。これは共鳴光子の吸収とひきつづく放出をともなうから，光子の散乱と同じである。系が状態 1 にあるときは散乱は起こらない。したがって，0－2 共鳴輻射の散乱が観測されれば状態は準位 0 にあり，散乱が無いことは系が準位 1 にあることを意味する。

系が状態 0 と 1 との重ね合わせ (2.13) にあるとすると，次の事象が対応する確率，$|c_0|^2$ と $|c_1|^2$，で起こる：(1)共鳴光子が散乱され，系は状態 0 にあることが見出される，(2)光子は散乱されず，パルスが通り過ぎた後，系は状態 1 にある。

このように 0－2 共鳴輻射のパルスは，状態 0 と 1 との一つへの収縮とともに，$\{P_0,\ P_1\}$ 測定として作用し，この型の 3 準位系はゼノン効果の検証によく適している。理想的には，実験は $T=\pi/\Omega$ まで延長するのがよい。この時間の間，0－1 共鳴輻射が系に作用し (いわゆる π-パルス)，状態 0 と 1 との干渉可能な重ね合わせを誘起する。そして等しい時間間隔 T/n で分けられた n 個の 0－2 共鳴輻射の短いパルスが当てられる。つまり，時間間隔 T の間に n 回の測定が行われるわけである。もし $n=0$ ならば，遷移 0→1 の確率は式 (2.16) で与えられ，時刻 T ではそれは 1 に等しいから，系は完全に状態 1 にある。けれども，$n\neq0$ ならば，遷移 0→1 の確率は 1 より小さく，n が増大す

れば減少する。nが大きくなるとこの確率は0に近づき，明らかにゼノン効果を表わす。

これと似た実験がワインランドのグループによって行われた (Itano et al 1990)。約5000個のベリリウムのイオン$^9Be^+$が磁場にトラップされて貯えられた。準位0と1は基底状態$2s^2S_{1/2}$の磁場における超微細準位であった。それらの間の遷移は振動数320.7MHzのラジオ波との共鳴状態におかれた。準位2は$2p^2S_{3/2}$の超微細準位の一つであって，準位0にだけ崩壊する。遷移0→2は波長313nmのレーザー輻射との共鳴状態におかれた。イオンから313nmの蛍光が検出されて，あるイオンが状態0にあったことの信号を与えた。

実験を始める前に，光学的ポンピング[8]によってイオンは基底状態0にされた。次にπ-パルスに相当する$T=256ms$の間，0－1共鳴ラジオ波の中におかれた。このラジオ波のパルスの間に，n個の短い(2.4ms) 313nmのパルスが当てられた。nは1，2，4，8，16，32あるいは64であった。これらのパルスは，あまり光学的ポンピングを生じることなしに，ほとんどすべてのイオンの波動関数を(状態0または1の一つに)収縮させるに十分な長さを持っている。

ラジオ波のπ-パルスが終ったとき，状態0を準備するために，もう一度，313nmのレーザー輻射が当てられた。この輻射の初めの100msの間に散乱された光子の数が数えられた。それはπ-パルスの終りに準位0にあるイオンの数に近似的に比例する(比例からのズレは較正によって考慮された)。

時刻Tにおいて準位0にあるイオンの測定数は，それぞれのnに対して，理論が予言した数と比べられた(2.2.1節を見よ)。それらの一致はほとんど完全だった。したがって量子ゼノン効果の理論は実験の支持を得たことになる。フォン・ノイマンの射影(あるいは収縮)仮説によって理論的に記述され

[8] これは313nmの長い(5秒)レーザーパルスを使って行われた。このパルスの間に，準位1にあったイオンは準位0に落ちてしまい，つづいて準位2に誘導遷移を行い準位0に自然崩壊することをくり返す。最後に，レーザー輻射を止めると，ほとんどすべてのイオンは準位0にある。

てきた状況を，この実験の設定が見事につくり出していることは面白い。

2.3 近似的で次々に行われる測定

量子ゼノン効果は連続測定が平凡な結果を与える（すなわち，平凡な時間依存性を持つ関数が結果として現われる）例である。しかし，これは，測定過程が有界作用素である直交射影子の離散的な組によって記述されるという非常に特殊な性格のためである。物理の言葉でいえば，離散スペクトルを持つオブザーバブルが考えられていたことが重要なのである。

平凡でない結果を生じる広いクラスの連続測定が，もちろん，存在する。以下の章で研究するのはそのような測定である。典型的な例は振動子の座標のモニターであるが，それ以外の系と測定も考察し，その中には量子場の配位の測定も含まれる。すべての場合に，考察する測定の特徴的な性質は，測られるオブザーバブルが連続スペクトルを持つことである。したがってわれわれの問題は連続（連続スペクトルを持つ）オブザーバブルの連続（時間について延びた）測定である。

第 4 章ではそのような測定の理論を，径路積分形式の枠の中で展開する。この方法はそれだけで閉じているので，必要なすべての式は径路積分を用いて導かれる。けれども，いままでに述べたふつうの量子測定理論から径路積分の測定理論への道をたどることは有意義である。この節はその仕事に当てられる。この節を飛ばしても，他の章を理解するには差支えない。

2.3.1 離散スペクトルのオブザーバブル対連続スペクトルのオブザーバブル

量子測定の理論は，ふつう簡単のために，離散スペクトルを持つ系に対して定式化される。われわれはこの場合を考えた（2.1.1 節の固有値 a_i は $i=1, 2, \cdots$ と番号付けられた）。しかし，われわれのゴールは連続スペクトルの測

定，例えば，位置（座標）q の測定である。そのような測定の簡単な記述をフォン・ノイマンの理論の枠内で定式化することができる。そのためには，オブザーバブル q の全領域を交叉しない領域

$$\Delta_i=[q_i,\ q_{i+1}]$$

に分割し，q が Δ_i の中に値を持つときは離散値 $Q_i=\frac{1}{2}(q_i+q_{i+1})$ を持つ新しいオブザーバブル Q をつくることができる。そのとき，Q の測定は，誤差 $\Delta q=\frac{1}{2}(q_{i+1}-q_i)$ の q の近似的な測定のモデルと考えることができる。オブザーバブル Q は離散スペクトル（固有値の離散的な組）Q_i を持ち，直交射影子の組 $\{P_i\}$,

$$(P_i\psi)(q)=\begin{cases}\psi(q), & q\in\Delta_i,\\ 0, & q\notin\Delta_i,\end{cases}$$

によって記述される。q の現実の近似的な測定は，二つの点で，このモデルと違っている。第 1 に近似的測定の結果（データ）は任意の数 q' の可能性があり，このデータは q の本当の値が間隔

$$\Delta_{q'}=[q'-\Delta q,\ q'+\Delta q]$$

の中にあることを意味する。

この場合の決定的な違いは，$|q''-q'|<\Delta q$ であると，二つの間隔 $\Delta_{q'}$, $\Delta_{q''}$ が交叉することである。そのような測定を射影子の組 $\{P(q')\}$ で記述すると $|q''-q'|<\Delta q$ に対しては $P(q')$ と $P(q'')$ は直交しえない。（例えば，$|q''-q'|\ll\Delta q$ だと，$P(q')$ と $P(q'')$ はほとんど一致する。）非直交射影子を持つこの型のモデルは，実際，つくれることがあとでわかる。それは矩形の特性を持つ測定装置による q の測定に対応する。

けれども，多くの場合，測定装置の特性は矩形でなくてなめらかであり，このことが，連続なオブザーバブルの測定が持つ，離散的なオブザーバブルの場合と違う，第 2 の違いの原因となる。要点は，上の議論では，間隔 Δ_i あるいは $\Delta_{q'}$ の中のすべての点が同等と考えられたことである。このことは，測

定によって結果 q' が得られたとき，q の本当の値は $\Delta_{q'}$ のどれかの点であるが，それ以上の情報は存在しないことを意味する。

しかし，現実の測定では，測定データ q' は，高い確率で，q の本当の値が間隔 $\Delta_{q'}$ の中央部分にあることを意味する。この間隔の端に近い値は可能ではあるが確率は低い。したがって間隔 $\Delta_{q'}$ の中の点に対して，確率分布に似た，ある分布(重み関数)が存在する。実際，この分布は q の全領域にわたって考えることができ，測定の一つ一つのデータ q' は，間隔 $\Delta_{q'}$ によってよりは，この分布あるいはある測度 $\mu_{q'}$ によって適切に記述される。

このことは q の測定のための装置の特性が矩形でなく釣り鐘型の曲線(図2.2)であり，例えばガウス曲線

$$\Omega_{q'}(q)=J\exp\left(-\frac{(q-q')^2}{2\Delta q^2}\right)$$

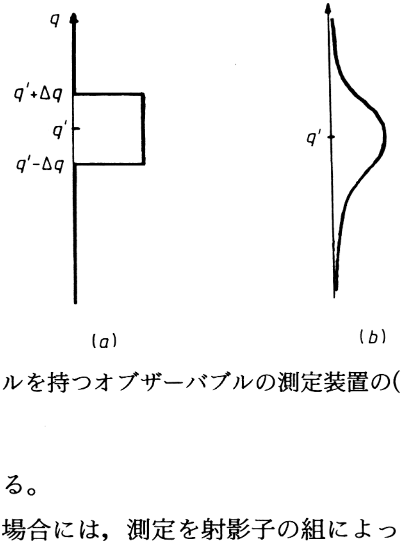


図2.2　連続スペクトルを持つオブザーバブルの測定装置の(*a*)矩形の,(*b*)なめらかな特性。

であることを意味する。

なめらかな特性の場合には，測定を射影子の組によって記述することはできないことが分かる。その代わりに正のエルミート作用素 $R(q')$ を使わなければならない。

したがって，離散オブザーバブルの代わりに連続オブザーバブルを扱うに

は，フォン・ノイマンの測定理論を一般化しなければならない。それを，二つの離散スペクトルの測定で一方が他方より粗雑なものを同時に考察することから始めよう。粗雑な測定は有限な誤差 Δq をもつ q の測定の見本として役立ち，精密な測定は q の正確な測定の見本になる。

2.3.2　近似的な測定

離散スペクトルの測定を一組考えよう。その一つは他方より精密である。精密な方の測定に対応するフォン・ノイマンの枠組に合う射影子の集合を $\{P_i\}$ としよう (2.1.1 節)。それはこの射影子の集合が完全性と直交性の条件，(2.5)，をみたすことを意味する。これを $\{i\}$ -測定と呼ぼう。もっと粗雑な測定 ($\{a\}$ -測定) を考え，その結果 (データ) を添字 a で表わす。粗雑な測定の与えられたデータ a はより精密な $\{i\}$ -測定のデータ i の集合 I_a に対応するとする。これが意味するのは以下のことである：$\{a\}$ -測定が行われたすぐ後で $\{i\}$ -測定をすると，得られる i は集合 I_a に属する値のどれかでありうるが，I_a に属さないものではありえない。

集合 I_a と $I_{a'}$ は 2.3.1 節で論じたように，一般には共通の元を持ちうる。したがって，$\{a\}$ -測定を射影子の集合 $\{P_a\}$ で定義するとき，それらの射影子は直交しない。さしあたり，それらの射影子は

$$P_a = \sum_{i \in I_a} P_i$$

と選べる。実際はこの射影子自身を使うよりは射影子 P_a に比例する作用素

$$R_a = \mu P_a \tag{2.18}$$

を使うほうが便利である。これは同等であって規格化のしかたが違うだけである。

状態 $|\psi>$ にある系に $\{a\}$ -測定をするとしよう。測定結果 a が確率 p_a で現われ，系を状態 $|\psi_a>$ に収縮させるとする。[9] そのあとで精密な $\{i\}$ -測定を行うと，データの一つ，$i \in I_a$，が確率

---

[9] p_a と $|\psi_a>$ はフォン・ノイマンの式で定義されなくてもよいことに注意しよう。われわれの目的は近似測定の場合に使える別の式を導くことである。

$$p_{ai}=\frac{<\psi_a|P_i|\psi_a>}{<\psi_a|\psi_a>}$$

をもって生じる(この式はフォン・ノイマンの理論と合っているが，一般には規格化されていないベクトルに対するものである)。この測定の過程で系は $P_i|\psi_a>$ に収縮する。

同じ元の状態 $|\psi>$ にある系に，直接，精密な $\{i\}$-測定をすると，データ i が，フォン・ノイマンの理論に従って，確率 $<\psi|P_i|\psi>$ をもって起こり，系は状態 $P_i|\psi>$ に収縮する。

粗雑な測定の後により精密な測定を行うと，精密な測定を直接行うときと同じ状況を生じると考えるのは自然である。したがって，２段階測定の記述

$$|\psi>\xrightarrow{a}|\psi_a>\xrightarrow{i}P_i|\psi_a> \tag{2.19}$$

は直接の精密測定の記述

$$|\psi>\xrightarrow{i}P_i|\psi> \tag{2.20}$$

と一致するはずである。

対応する収縮状態の一致は

$$P_i|\psi_a>\sim P_i|\psi> \tag{2.21}$$

(状態のノルムは違ってよい)を与え，一方，確率の一致は

$$\sum_{a(i\in I_a)}p_a p_{ai}=<\psi|P_i|\psi> \tag{2.22}$$

を要求する。ここで和は，$i\in I_a$ であるような，すべての a について行われる。

１番目の要請は，$\{a\}$-測定での収縮が

$$|\psi>\xrightarrow{a}|\psi_a>=R_a|\psi> \tag{2.23}$$

の形を持つならばみたされる。ここで作用素(2.18)が使われている。この場合，R_a が射影子 P_a に比例し，P_a は式

$$P_iP_a=\begin{cases}P_i, & i\in I_a,\\ 0, & i\notin I_a,\end{cases}$$

をみたすので，要請(2.21)がみたされる。

(2.22)式を(2.23)式と結びつけ，(2.5)式を考慮すると

$$\mu^2\sum_{a(i\in I_a)}\frac{p_a}{<\psi|R_a{}^2|\psi>}=1$$

を得る。この条件は

$$p_a=<\psi_a|\psi_a>=<\psi|R_a{}^2|\psi> \tag{2.24}$$

とおくことによって，$\mu^{-2}=n$ が集合 I_a の要素の数であれば，みたされる。式(2.5)の結果として

$$\sum_a p_a=1$$

であることが容易にわかる。

このようにわれわれは考える測定を(非直交射影子に比例する)作用素の集合 $\{R_a\}$ で表わすことができる。そのとき収縮の規則は(2.23)式であり，可能事象の測定データの確率は(2.24)によって表わされる。この測定は，その精密な測定が射影子の集合 $\{P_i\}$ に対応するならば，あるオブザーバブルの近似的な測定と考えることができる。この近似の誤差は集合 I_a によって表わされ，それは2.3.1節で論じた間隔 $\Delta_{q'}$ に似ている。

この‘間隔’の異なる点 $i\in I_a$ は同じ資格で考えられている。これは矩形の特性を持つ測定装置に対応する。しかし，これは現実的ではない。次のステップは，均質な間隔に代えて，重み関数(測定の重要な性質)を導入することである。

粗雑な $\{a\}$ -測定を記述する重み関数を $\mu_{ai}\geq 0$ としよう。われわれは(2.23)の形の収縮仮説を，ただし

$$R_a=\sum_{i\in I_a}\mu_{ai}P_i \tag{2.25}$$

とともに，受け入れる。R_a は射影子からは程遠い。しかし，収縮作用素との調和を与える条件式(2.21)は

$$P_iR_a=\begin{cases}\mu_{ai}P_i, & i\in I_a,\\ 0, & i\notin I_a,\end{cases}$$

の結果として成り立つ。

確率の一致 (2.22) も，測定データ a の確率が (2.24) によってきまり，そして

$$\sum_a R_a{}^2=1 \tag{2.26}$$

がみたされるならば，やはり成り立つ。上の式は

$$\textstyle\sum_a \mu_{ai}{}^2=1$$

によって与えられる。

上で導入した作用素 R_a は，$R_a{}^\dagger=R_a$ であり，また任意の状態 $|\psi>$ に対して

$$<\psi|R_a|\psi>\geq 0$$

であるという意味で正定値のエルミート作用素である。ここで，正定値作用素の集合 $\{R_a\}$ の起原については忘れてよい。規格化条件 (2.26) をみたすそのような集合が与えられたとすれば，測定は収縮則 (2.23) によって記述され，異なる測定データに対して確率分布 (2.24) が与えられる。

元の状態が混合状態 ρ であるもっと一般の場合には収縮過程は次のように記述される：[10]

$$\rho\longrightarrow\rho_a=R_a\rho R_a \tag{2.27}$$

$$p_a=tr\rho_a\quad 。 \tag{2.28}$$

連続スペクトルの場合へのこの定義の一般化は簡単である。以下ではこの一般化を，(1)瞬間測定の系列から成る次々の測定と，(2)そのような系列の極限としての連続 (時間について延ばされた) 測定とを記述するのに使う。

量子測定のもっと精巧な数学的な定式が Davies (1976), Kraus (1983), Holevo (1982), Busch and Lahti (1990) および Busch et al (1990) にある。

---

[10] 同等だが，これより便利でないと思われるのは，規格化された密度行列

$$\rho\rightarrow\rho_a=\frac{R_a\rho R_a}{tr(R_a\rho R_a)},\quad p_a=tr(R_a\rho Ra)$$

によって収縮を記述することである。

この定式は**道具**，**効果**および**操作**というような数学的概念を用いて測定を記述する。しかし，もっと簡単で‘古風な’いままでの記述で十分であり，そのほうがずっと見通しがよいので，ここではこの定式にはふれない。われわれが用いる概念を定義するもう一つの方法は Accardi (1981, 1984) による量子確率理論にもとづくことである。

2.3.3 次々に行われる近似的な測定

ここまで，近似的な測定の記述は，精密な測定が離散スペクトルに対するものである場合に対して導かれた。しかし，結果の式は連続スペクトルのオブザーバブルの近似的な測定の場合に，容易に，一般化できる。例として1次元量子系の位置 q の測定をとろう。この場合，測定結果（データ）はある実数 q' で表わされる。測定誤差は Δq であり，用いる装置の特性は矩形であって，間隔 (2.17) の中のすべての点は同等に扱われる。すると測定は式 (2.18)，(2.23) および (2.24) に似た式によって記述されるはずである。

いまの場合，射影子に比例する作用素の系 $\{R_{q'}\}$ は

$$R_{q'}=\frac{1}{\sqrt{2\Delta q}}P_{q'}$$

$$(P_{q'}\psi)(q)=\begin{cases}\psi(q), & q\in\Delta_{q'}\\ 0\ , & q\notin\Delta_{q'}\end{cases}$$

と定義される。測定データ q' は確率密度

$$p(q')=<\psi|R_{q'}{}^2|\psi> \tag{2.29}$$

をもって生じ，収縮

$$|\psi>\xrightarrow{\ q'\ }R_{q'}|\psi> \tag{2.30}$$

がつづく。規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(q')\,dq'=1$$

は，明らかに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{q'}{}^2 dq' = 1 \tag{2.31}$$

の結果として得られる。

この型の測定が次々に行われるとし，測定と測定との間は系の自由な発展が行われるとする。時刻 t_0 での元の状態が $|\psi_0>$ であるとすると，(長さ Δt の) 間隔 $[t_0,\ t_1]$ の間の自由発展ののち，状態は

$$|\psi_1> = U(t_1,\ t_0)|\psi_0>$$

であり，ここで $U(t_1,\ t_0)$ は時間間隔 $[t_0,\ t_1]$ に対する発展作用素である。時刻 t_1 に誤差 Δq で q の測定を行うと，データ q_1 が確率密度

$$p(q_1) = <\psi_1|R_{q_1}{}^2|\psi_1> = <\psi_0|U^\dagger(t_1,\ t_0)R_{q_1}{}^2 U(t_1,\ t_0)|\psi_0>$$

をもって生じる。測定は次のように系の収縮を生じる：

$$|\psi_1> \xrightarrow{q_1} |\psi_1'> = R_{q_1}|\psi_1> = R_{q_1}U(t_1,\ t_0)|\psi_0> \quad 。$$

(長さ Δt の) 次の間隔 $[t_1,\ t_2]$ は $|\psi_1'>$ の

$$|\psi_2> = U(t_2,\ t_1)|\psi_1'>$$

への発展を生じる。次に，時刻 t_2 での測定が結果 q_2 を確率密度

$$p(q_2) = \frac{<\psi_2|R_{q_2}{}^2|\psi_2>}{<\psi_2|\psi_2>}$$

をもって生じ，状態 $|\psi_2>$ を収縮させる：

$$|\psi_2> \xrightarrow{q_2} |\psi_2'> = R_{q_2}|\psi_2> = R_{q_2}U(t_2,\ t_1)R_{q_1} U(t_1,\ t_0)|\psi_0> \quad 。$$

この過程をつづけることによって，データ $(q_1,\ q_2,\ \cdots q_{N-1})$ をともなう $N-1$ 回の測定と，測定間の自由な発展のあとでは，時刻 $t_N = T$ においては状態は

$$|\psi_N> = U_{q_1 \cdots q_{N-1}}|\psi_0> \tag{2.32}$$

$$U_{q_1 \cdots q_{N-1}} = U(t_N,\ t_{N-1})R_{q_{N-1}} \cdots U(t_2,\ t_1)R_{q_1}U(t_1,\ t_0)$$

であることが容易にわかる。

次々の測定のデータが $(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{N-1})$ である確率密度は

$$p(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{N-1})=p(q_1)p(q_2)\cdots p(q_{N-1})$$

である。作用素 $U(t'',\ t')$ のユニタリー性を考慮するとこの確率密度は

$$p(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{N-1})=<\psi_N|\psi_N> \tag{2.33}$$

である。規格化条件

$$\int\cdots\int p(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{N-1})\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\cdots\mathrm{d}q_{N-1}=1$$

が成り立っていることが示される。

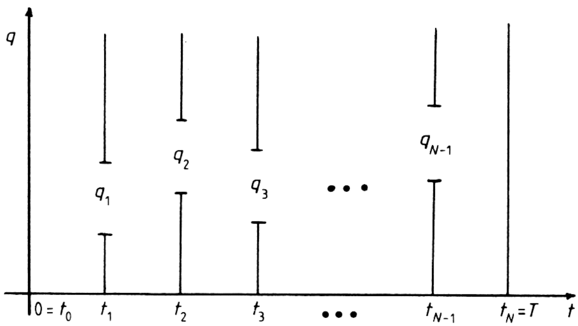


図 2.3 位置 (座標) の一連の近似的な測定によって決定される帯。

$N\to\infty$，$\Delta t=t/N\to 0$ の極限では有限な時間間隔 T の間に無限回の測定がつづいて行われる。これは**連続測定**のモデルと考えることができる。それぞれの q_i に対して間隔 Δ_q を持つ系列 $(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{N-1})$ は，$N\to\infty$ の極限で，幅 $2\Delta_q$ の連続な帯を，図 2.3 のように，決定する。この帯を α と表わそう。すると式 (2.32) の極限は

$$|\psi_\alpha>=U_\alpha|\psi_0>,\quad p_\alpha=<\psi_\alpha|\psi_\alpha> \tag{2.34}$$

$$U_\alpha=\lim_{N\to\infty}U_{q_1\cdots q_{N-1}} \tag{2.35}$$

である。

作用素(2.35)は連続測定をされている量子系に対する伝播子(確率振幅)の役割をする。それは，帯 α の中にある径路についての径路積分の形に表わされる。これが，連続測定の特性を計算するのに径路積分が使われる理由である(Mensky 1979 a)，以下の章では，瞬間測定に言及することなしに，連続測定の径路積分形式を展開する。しかしここで，この瞬間測定のもっと一般の定義，すなわちなめらかな特性を持つ測定，に対する $N\to\infty$ の極限を考えよう。

ここまでの位置 q の近似測定は矩形の特性を持つ装置に対応するモデルである。q' をその測定データとすると，q の本当の値は間隔 $\Delta_{q'}$，(2.17)，のどの点でもありえて，各点は同等に可能性がある。現実の装置はもっとなめらかな特性，例えばガウス型，に対応する。その場合の測定のモデルは，射影子に比例しないで(2.25)と似た正定値作用素の集合 $\{\mathrm{R}_{q'}\}$ にもとづかなければならない。

$$(R_{q'}\psi)(q)=\Omega(q-q')\psi(q)$$

としよう。ここで $\Omega(x)\geq 0$ は測定装置の特性である。その典型的な選び方はガウス型

$$\Omega(x)=J\exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta q^2}\right) \tag{2.36}$$

である。規格化条件(2.31)は

$$\int\Omega^2(x)\,\mathrm{d}x=1$$

であればみたされる。ガウス型の特性に対しては

$$J^2=\frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta q}$$

であれば，この条件はみたされる。

作用素 $R_{q'}$ のこの定義を使うと，瞬間的でひきつづく測定に対していままでに導いたすべての式が成り立ち，その中には，収縮則(2.30)，瞬間測定のデータに対する確率密度(2.29)，ひきつづく測定の下での発展(2.32)，およびひきつづく測定データに対する確率密度(2.33)が含まれる。しかし，連続

測定に移行するには，式(2.35)よりもっと複雑な極限を取らなければならない。それは，短い時間間隔で次々にいくつかのガウス型測定を行うことは，小さい(もっと狭い)幅のただ一つのガウス型測定を行うことと同等だからである。有効ガウス帯が有限な極限と一定の幅を持つためには，Nに依存するガウス型特性(訳注)

$$\Omega_N(x)=J_N\exp\left(-\frac{x^2}{2\Delta q_N{}^2}\right)$$

を導入しなければならない。ここで

$$\Delta_{q_N}{}^2=N\Delta_q{}^2$$

である。

この極限の取り方は不自然に，あるいは少くとも面倒に，見える。以下の章において，ガウス型の定義は，ほかの型の連続測定と並んでまったく自然であることが，径路積分の方法の枠内で示される[11]。その定式は十分であるとともに効果的であることが証明される。ここまで考えた簡単な場合に二つの定義が同等な結果に導くことは重要である。しかし，径路積分にもとづく定義の方が一般的であって，ひきつづく測定の極限として提示することができない場合にも適用できる。

この章で，ひきつづく測定の極限としての連続測定の表わし方を考えたのは，(1)連続測定に必要な概念と瞬間測定に必要な概念との結びつきを示すため，(2)連続測定のはっきりしたモデルを与えることによって，連続測定の概念そのものに光を当てるためと，(3)連続測定に対する主な式を，どのような展開もふつうの量子力学を基にしたい読者に対していっそう説得力があるようにするからである。けれども，ひきつづく測定の極限として導けるすべての結果は(この方法では導けないほかの結果とともに)量子力学のファイン

(訳注) 原書にはここに注11がある。日本語版のための修正において，著者はこれを除いた。したがって，次の注11は原書の注12である。

[11] 量子連続測定の最初の考察は径路積分の方法によって行われた(Mensky 1979 a, b). その後，それはKhali (1981) とBarchielli et al (1982) によってひきつづく測定の極限として定義された。量子連続測定の理論はCaves (1986, 1987) によってさらに展開された。

マンの径路積分形式からもっと容易に直接的に得られる。このことを本書の残りの部分で示すことにする。

3. 径路積分の方法

1940 年代の遅く，Richard Feynman (1948) は量子力学の径路積分形式を提唱し，それはふつうのシュレーディンガー方程式の形式と同等であることが証明されたが，発見法的な力をはるかに持っていた (ファインマンの理論の詳しい内容についは Feynman and Hibbs (1965) を見よ)。以下の章での連続測定の考察はファインマンの径路積分にもとづく。量子連続測定の理論を，第 2 章のような極限過程によってでなく，径路積分によって直接に定式化する。

径路積分の方法の主な長所は物理的意味の見通しがよいことである。この方法は，また，数学的にも長所を持っていて，径路積分の数学的な面は詳しく研究されている。

この章はふつうの量子力学で (測定を考慮せずに) 使われる径路積分の使い方の概略を述べたものである。この方法に慣れている読者はこの章を飛ばして差支えない。原理的な問題にだけ関心があって技術的な詳細はどうでもよい人は第 1 節だけ読んで，この章の残りは飛ばしてよい。すべての読者が，最初に読むときには，この章を飛ばしてよい。

3.1 伝播子と径路積分

時刻 t における量子系の状態は波動関数 $\psi_t(q)$ によって表わされ，これは系の座標 (位置) q による。座標 q はある '配位空間' の中の点である。これは 1 個の点のような粒子の位置かも知れず，そのときは，それは 3 次元 (実) 空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点である。あるいは，考える系が多くのパラメーター (座標) によっ

て記述されるならば，それはある多次元空間の点である。連続測定の理論の主な点は，すべて，簡単な1次元系の場合に定式できる。そこで，これから後，特に断らない限り，q はある実数($\boldsymbol{R}^1$ の点)とする。

波動関数の時間依存性は**シュレーディンガー方程式**

$$i\hbar\frac{\partial\psi_t}{\partial t}=\hat{H}\psi_t \tag{3.1}$$

によって決定される。ここで量子ハミルトニアン $\hat{H}$ は，古典ハミルトニアン $H(p,\ q,\ t)$ から，pを $-i\hbar\partial/\partial q$ でおきかえることによって得られる。したがって，時刻 t における波動関数 ψ_t を知っていれば，シュレーディンガー方程式を解いて，任意の他の時刻 t' における波動関数を知ることができる。

径路積分の方法での主な目標は**伝播子**，すなわち，時刻 t' における一点 q' から時刻 t'' における他の点 q'' への遷移に対する確率振幅である。それを $U(t'',\ q''|t',\ q')$ としよう。これは2点関数であって，発展作用素 $U(t'',\ t')$ の核と解釈できる。伝播子が知られていれば，状態 $|\psi_{t''}>$ は $|\psi_{t'}>$ によって

$$|\psi_{t''}>=U(t'',\ t')|\psi_{t'}>$$

あるいは

$$\psi_{t''}(q'')=\int\mathrm{d}q'\,U(t'',\ q''|t',\ q')\,\psi_{t'}(q') \tag{3.2}$$

と表わすことができる。

注意　1　量子力学の多くの問題ではハミルトニアン $H=H(p,\ q)$ はあらわには時刻によらない。そのとき発展作用素と伝播子は差 $t''-t'$ を通じてしか，t' と t'' にはよらない。この場合

$$U(t'',\ t')=U(t''-t')=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t''-t')}$$

$$U(t'',\ q''|t',\ q')=<q''|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t''-t')}|q'>$$

であって，$|q'>$ は一定の位置，$q=q'$，の状態を表わす。しかし，以下の章で考える連続測定の問題では，有効ハミルトニアンは時刻にあらわに依存する。

伝播子はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t''}U(t'',\ q''|t',\ q')=\hat{H}''U(t'',\ q''|t',\ q') \tag{3.3}$$

のデルタ関数の初期条件

$$U(t',\ q''|t',\ q')=\delta(q''-q') \tag{3.4}$$

の場合の解である。

しかし，径路積分の方法では，伝播子は，シュレーディンガー方程式とは独立に，初めの点と終りの点を結ぶすべての径路

$$[q]=\{q(t)|t'\leq t\leq t''\} \tag{3.5}$$

$$q(t')=q',\ q(t'')=q'' \tag{3.6}$$

にわたる積分の形で構成される。これを記号として次のように書くことができる。

$$U(t'',\ q''|t',\ q')=\int \mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right) 。 \tag{3.7}$$

ここでSは系の**ラグランジアン**Lで表わされた作用

$$S[q]=\int_{t'}^{t''}L(q,\ \dot{q},\ t)\mathrm{d}t$$

であり，ラグランジアンはふつうのしかたでハミルトニアンと結びついている。

$$H(p,\ q,\ t)=p\dot{q}-L(q,\ \dot{q},\ t),\ p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

径路積分の正確な定義は次の二つの節で与える。

伝播子に対するもう一つの（そしてしばしばもっと便利な）表現は相空間における径路についての積分である。そのような径路$[p,\ q]$は位置空間（配位空間）における径路$[q]$と運動量空間における径路

$$[p]=\{p(t)|t'\leq t\leq t''\}$$

のペアとして定義される。この場合，伝播子の表わし方は

$$U(t'',\ q''|t',\ q')=\int \mathrm{d}[p]\int \mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\right.$$

$$(p\dot{q} - H(p,\ q,\ t))\mathrm{d}t\Big) \tag{3.8}$$

である。

ここまでのすべての式は，量子力学において，考えている時間間隔の間に測定が行われないときに適用される。この時間間隔の間に測定が行われる場合には，径路積分は適当な径路の集まりに制限しなければならないが，それはあとまわしにして，ここでは式(3.7)，(3.8)における径路積分の正確な定義を与えよう。

3.2　径路積分の定義

量子系の伝播子を構成するのに使う径路積分は**離散化**あるいは‘断片化’の助けを借りて定義することができる。積分(3.7)に対しては，これは連続な径路 $[q]$ を，図3.1に示すような，1次曲線（直線）の連続な断片でおきかえることである。線の節（ふし）は径路 $q_i = q(t_i)$ の上にある。連続な径路 $[q]$ についての積分 $\mathrm{d}[q]$ はすべての可能な節の位置についての積分

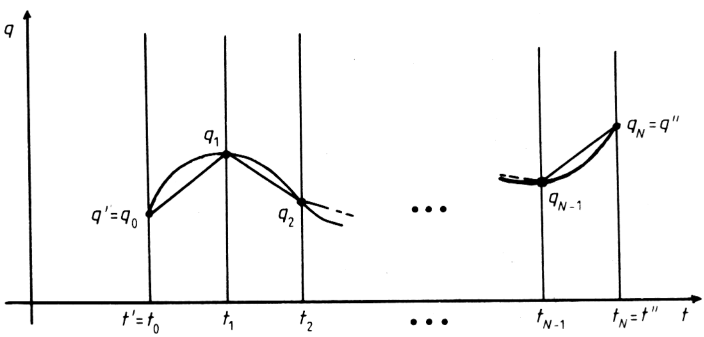


図3.1：　径路 $[q]$ の断片化。

$$\prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{d}q_i$$

でおきかえられる。これは径路積分の一つの近似を与える。径路積分の正しい値は破線の節の間の時間間隔

$$\Delta t = \frac{t'' - t'}{N}$$

が 0 になる極限で得られる。

系の作用 $S[q]$ を，断片化するときには，対応する節の関数でおきかえなければならない。

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(t, q)$$

の形のラグランジアンに対しては，作用は

$$S[q] = \int_{t'}^{t''} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(t, q) \right) \mathrm{d}t \tag{3.9}$$

であり，作用の断片化は

$$S(q_0, q_1, \cdots, q_N) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta t} \right)^2 - V(t_i, q_i) \right] \Delta t \tag{3.10}$$

である。規格化因子

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar \Delta t} \right)^{1/2} \tag{3.11}$$

を導入すると，最終的に

$$\begin{aligned} U(t'', q'' | t', q') &= \lim_{N \to \infty} U_{(N)}(t'', q'' | t', q') \\ &= \lim_{N \to \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar \Delta t} \right)^{1/2} \int \prod_{i=1}^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar \Delta t} \right)^{1/2} \mathrm{d}q_i \\ &\quad \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m \frac{(q_i - q_{i-1})^2}{\Delta t} - V(t_i, q_i) \Delta t \right) \right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

を得る。この極限は問題 (3.3)，(3.4) の解を与えることが示される。

定義 (3.12) は，規格化因子 (3.11) を勝手に選んでいるので，まったく満足すべきものとは思われない。相空間の径路積分 (3.8) の断片化による定義はそのような欠点を持たない。それは配位空間での径路 $[q]$ の同じ連続な直線

の断片による断片化と運動量空間での径路 $[q]$ の断片的な一定値の断片化を使うものである (図 3.2)。

すると測度 $\mathrm{d}[p]\,\mathrm{d}[q]$ は

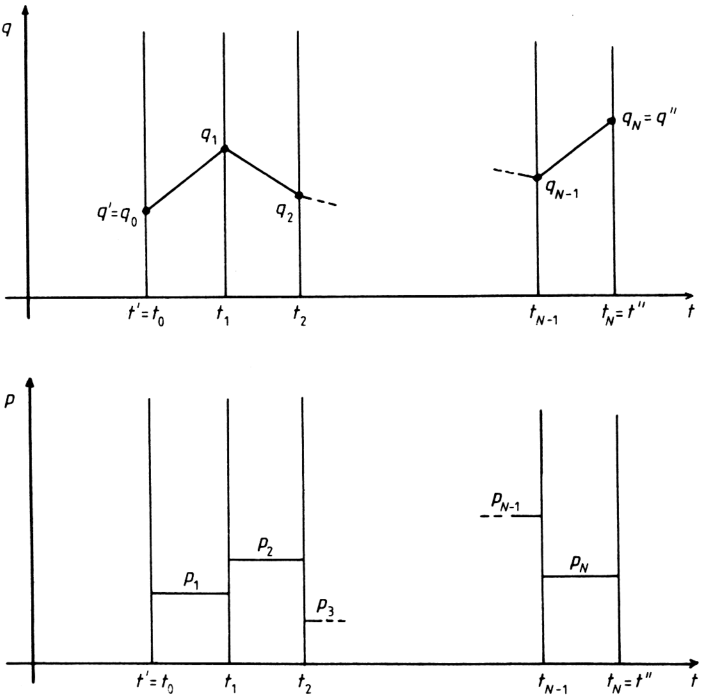


図 3.2 ：径路 $[q]$ と径路 $[p]$ の断片化。

$$\prod_{i=1}^{N-1} \mathrm{d}q_i \prod_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi\hbar} \tag{3.13}$$

と断片化され，作用

$$S[p,\ q]=\int_{t'}^{t''}\left[p\mathrm{d}q-\left(\frac{p^2}{2m}+V(t,\ q)\right)\mathrm{d}t\right]$$

は

$$S(p_1,\ \cdots,\ p_N,\ q_0,\ q_1,\ \cdots q_N)$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left[p_i(q_i-q_{i-1})-\left(\frac{p_i^{\ 2}}{2m}+V(t_i,\ q_i)\right)\Delta t\right]$$

と断片化される。その結果，伝播子に対する式は

$$U(t'',\ q''\,|\,t',\ q')=\lim_{N\to\infty}U_{(N)}(t'',\ q''\,|\,t',\ q')$$
$$=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=1}^{N-1}\mathrm{d}q_i\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi\hbar}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\left[p_i(q_i-q_{i-1})-\left(\frac{p_i^{\ 2}}{2m}+V(t_i,\ q_i)\right)\Delta t\right]\right\} \tag{3.14}$$

となる。

いわゆる**ガウス積分**に対する式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{a}x^2+\mathrm{c}x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{-a}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{c^2}{4a}\right) \tag{3.15}$$

を使うと，(3.14) のすべての p_i についての積分を行うことができる。その結果，正しい規格化因子をもって，式 (3.12) が導かれる。積分 $\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$ のふつうの規格化因子 $(2\pi\hbar)^{-1}$ についてはどうだろうか？$2\pi\hbar$ は相空間における‘要素的な量子細胞’の体積だから，それははっきりした物理的解釈を持っている。

注意 2 いままで1次元系の場合を考えたので，p，q は実数であった。n 次元系の場合には，p，q は n-ベクトルであり，ほとんどの式はそのまま成り立つが，ベクトルの内積が数の積にとって代わる。例えば

$$p_{(i)}(q_{(i)}-q_{(i-1)})=\sum_{a=1}^{n}p_{(i)a}(q_{(i)}{}^{a}-q_{(i-1)}{}^{a})$$

となる。さらに (3.14) の規格化因子 $(2\pi\hbar)^{-1}$（(3.12) では $(m/2\pi(\hbar\Delta t)^{1/2})$ は各自由度ごとに現われるから，測度は

$$\prod_{i=1}^{N-1}\mathrm{d}^nq_i\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}^np_i}{(2\pi\hbar)^n}\ \text{および}\ \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{N-1}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{n/2}$$
$$\mathrm{d}^nq_i \tag{3.16}$$

となる。

3.3　振動子に対する径路積分

径路積分の理論へのもっとも困難な挑戦はいろいろなポテンシャル $V(t, q)$ に対してそれを評価することである。それを解決するには四つの方法がある。

1. 2次でないポテンシャルのあるクラスに対しては径路積分を正確に評価する方法がある。
2. 2次でない付加項(摂動)を持つ2次のポテンシャルに対しては，径路積分を，摂動論を使って，近似的に評価することができる。
3. ファインマンの径路積分がシュレーディンガー方程式をみたすことを使って，その解として径路積分を構成することができる。
4. 任意の2次のポテンシャルに対して，さらに一般的に任意の2次の作用に対して，径路積分を評価することができる。

ここでは，第1の可能性については，文献として Duru and Kleinert (1982)，Duru (1984)，Bin Kang Cheng (1989)，Grosche (1989)，Anderson and Anderson (1990) およびそこに引用されているものをあげるだけで，その内容には立ち入らない。第2の可能性については次の節で簡単に述べ，第3の可能性は第4章で考える。ここでは最後の方法の一つの例を考えよう。それは厳密に解ける2次のポテンシャルである(もっと一般的で，ある意味ではもっと簡単な考察を次の節で与える)。

初めにハミルトニアン

$$H=\frac{p^2}{2m}$$

をもつ自由粒子を考える。この場合，断片化された径路積分 (3.12) は

$$U_{(N)}(t'', q''|t', q')=\int dq_1\int dq_2\cdots\int dq_{N-2}\int dq_{N-1}$$
$$U_0(t'', q''|t_{N-1}, q_{N-1})U_0(t_{N-1}, q_{N-1}|t_{N-2}, q_{N-2})\cdots$$
$$U_0(t_2, q_2|t_1, q_1)U_0(t_1, q_1|t', q') \tag{3.17}$$

という形になる。ここで

$$U_0(t'',\ q''|t',\ q')=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t''-t')}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{(q''-q')^2}{t''-t'}\right) \quad (3.18)$$

である。

ガウス積分(3.15)によって核 U_0 はいわゆるアインシュタイン-スモルコフスキ条件(数学者がチャップマン-コルモゴロフ条件と呼ぶもの)：

$$\int dq'\,U_0(t'',\ q''|t',\ q')\,U_0(t',\ q'|t,\ q)=U_0(t'',\ q''|t,\ q) \quad (3.19)$$

をみたすことが簡単に証明される。したがって(3.17)のすべての積分を行うことができて，結果は

$$U_{(N)}(t'',\ q''|t',\ q')=U_0(t'',\ q''|t',\ q')$$

である。$N\to\infty$ の極限をとり(3.12)を使うと

$$U(t'',\ q''|t',\ q')=U_0(t'',\ q''|t',\ q')$$

であり，したがって，(3.18)が自由粒子の伝播子を詳細に表わしたものとなる。

次に，系は，外力 $F(t)$ によって駆動される振動数 ω の振動子であるとしよう：

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2}-F(t)q \quad (3.20)$$

$$L=\frac{m\dot{q}^2}{2}-\frac{m\omega^2q^2}{2}+F(t)q \quad (3.21)$$

$$S[q]=\int_{t'}^{t''}\left(\frac{m\dot{q}^2}{2}-\frac{m\omega^2q^2}{2}+F(t)q\right)dt \quad 。 \quad (3.22)$$

系の古典的な軌跡，すなわち問題

$$m\ddot{q}_{class}+m\omega^2q_{class}=0$$

$$q_{class}(t')=q',\quad q_{class}(t'')=q''$$

の解を $q_{class}(t)$ としよう。点 q'，q'' の間の任意の径路 $[q]$ を古典軌跡とゼロ境界条件，$z(t')=z(t'')=0$，を持つ径跡 $[z]$ との和

$$q(t)=q_{class}(t)+z(t) \quad (3.23)$$

の形に表わす。すると部分積分によって，作用 (3.22) は

$$S[q]=S[q_{class}]+S_0[z]$$

の形の和になり，S_0 は (3.22) において $F\equiv 0$ とおいて得られる自由振動子の作用

$$S_0[z]=\frac{m}{2}\int_{t'}^{t''}(\dot{z}^2-\omega^2 z^2)\,\mathrm{d}t$$

であることがわかる。

古典径路 $[q_{class}]$ はあいまいさなしにきまっているから，(3.7) における径路 $[q]$ についての積分は径路 $[z]$ についての積分に帰着する。作用 (3.22) のときの (3.7) 式は，そのとき

$$U(t'',\ q''|t',\ q')=J\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q_{class}]\right) \tag{3.24}$$

という形になり，因子 J はゼロ境界条件の径路についての積分

$$J=\int_0^0 \mathrm{d}[z]\exp\left(\frac{im}{2\hbar}\int_{t'}^{t''}(\dot{z}^2-\omega^2 z^2)\,\mathrm{d}t\right) \tag{3.25}$$

によって定義される。

古典作用 $S[q_{class}]$ はきちんと評価できるから，(3.24) 式は伝播子 U の点 q'，q'' への依存のしかたを決定する。因子 J はパラメーター m，ω と時間の長さ

$$T=t''-t'$$

にだけよる。この因子は，積分 (3.25) のスペクトル表現 (Feynman and Hibbs 1965) を使って，計算することができる。

それを行うには，径路 $[z]$ をフーリエ級数に展開する。

$$z(t)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n\sin\Omega_n(t-t') \tag{3.26}$$

ここで記号

$$\Omega_n=\frac{n\pi}{T}$$

を導入した。$[z]$ についての積分はスペクトル成分 z_1，z_2，… についての積分に帰着する。任意の (一般には複素数の) 関数の (3.26) の型の級数展開に対

して成り立つ**パーシヴァルの公式**

$$\| u \|^2 = \int_{t'}^{t''} |u(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \tag{3.27}$$

によって，作用$S_0[z]$をスペクトル成分 z_n を用いて表わすことができる：

$$S_0[z] = \frac{mT}{4} \sum_{n=1}^{\infty} z_n{}^2 (\Omega_n{}^2 - \omega^2) \quad 。$$

したがって，積分 (3.25) は

$$J = J_0 \int \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \cdots \exp\left(\frac{\mathrm{i}mT}{4\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} z_n{}^2 (\Omega_n{}^2 - \omega^2) \right) \tag{3.28}$$

となる。ここで J_0 は ω によらない数係数である。

z_n についての無限多重積分は，実際は，1 次元のガウス型積分の積である。それは，(3.15) 式によって，

$$J = J_0 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\pi \mathrm{i}\hbar}{mT(\Omega_n{}^2 - \omega^2)} \right)^{1/2}$$

となる。**オイラーの無限積**

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_n{}^2} \right) = \frac{\sin \omega T}{\omega T} \tag{3.29}$$

を使い，伝播子 (3.24) が $\omega \to 0$ の極限で (3.18) 式と一致するように J_0 をきめると最後に

$$J = \left(\frac{m\omega}{2\pi \mathrm{i}\hbar \sin \omega T} \right)^{1/2}$$

を得る。(3.24) 式にこれを使うと，駆動されている振動子に対して

$$U(t'', q'' | t', q') = \left(\frac{m\omega}{2\pi \mathrm{i}\hbar \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S[q_{class}] \right) \tag{3.30}$$

が得られる。

3.4　ガウス型径路積分

前の節で評価した調和振動子に対する径路積分はガウス型径路積分の一例である。ここでガウス型径路積分をもっと一般的な観点から簡単に考察しよ

う。経路積分のさらに詳しい議論は Feynman and Hibbs (1965) と Itzykson and Zuber (1980) にある[1]。

この考察の出発点は1次元**ガウス積分**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \exp\left(-\frac{1}{2}q^2 + cq\right) = (2\pi)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2}c^2\right) \tag{3.31}$$

である。この型の n 個の積分の積をつくると，n 次元ベクトルについてのガウス積分

$$\int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{q})\right) = (2\pi)^{n/2} \exp\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c})\right)$$

が得られる。ここでスカラー積

$$(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i$$

が導入されている。対称行列 A を使って $\boldsymbol{q}$ を $A^{1/2}\boldsymbol{q}$ で $\boldsymbol{c}$ を $A^{-1/2}\boldsymbol{c}$ でおきかえ，積分変数を変えると容易に

$$\int \left|\det \frac{A}{2\pi}\right|^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{q},\ A\boldsymbol{q}) + (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{q})\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{c},\ A^{-1}\boldsymbol{c})\right) \tag{3.32}$$

が得られる。

経路

$$[q] = \{q(t) \mid t' \leq t \leq t''\}$$

を無限個の成分 $q(t)$（引数 t はこれらの成分を数える添数の役目をする）を持つベクトルと考え，また，経路

$$[c] = \{c(t) \mid t' \leq t \leq t''\}$$

についても同様にする。するとすぐ上の式を

[1] 経路積分の数学的に厳密な理論は Kac (1958) にあるが，それは，ほとんど，古典統計力学に現われるウィーナーの経路積分を扱っている（その積分は，あとで，この節で導入する記号ではエルミート作用素 A によって特徴づけられる）。量子力学に現われるファインマンの経路積分（反エルミート作用素 A）の数学的に厳密な基礎づけに捧げられた論文は多い。例えば，Morette-De Witt (1972), Klauder (1987) およびそこにあげられた文献を見よ。(Mensky (1992) は，孤立系の概念を物理的にもっと現実的な環境によって測定されている系という描像でおきかえれば，きちんと定義された制限されたファインマン積分が導かれることを論じている。)

$$\int \mathrm{d}[q]\exp\left(-\frac{1}{2}([q],\ A[q]\right)+([c],\ [q])$$
$$=\exp\left(\frac{1}{2}([c],\ A^{-1}[c]\right) \tag{3.33}$$

と書き直すことができる。ここでスカラー積は径路に対して

$$([c],\ [q])=\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\ c(t)q(t) \tag{3.34}$$

によって定義され，Aは径路の空間における線形作用素であり，この空間での測度は式

$$\mathrm{d}[q]=\left|\det\frac{A\mathrm{d}t}{2\pi}\right|^{1/2}\prod_{t=t'}^{t''}\mathrm{d}q(t) \tag{3.35}$$

によって形式的に定義される。

この式は断片化のための処方として理解すべきである。前に定義した径路積分(3.12)は，有限な数係数を除いて，この処方と合っていることを見るのは難しくない。しかし，(3.33)式の利点はこの式を径路積分にともなう操作に適用して摂動論を展開するのが容易な点にある。

このことを示すために，ガウス型径路積分の形式的な定義として，式(3.33)と(3.34)をとることにしよう。多くの場合に，断片化の過程をあらわに導入する必要はないので，(3.35)式で表わされる具体的な断片化の方式は忘れてかまわない。

(3.33)式は微分作用素を含むいろいろな線形作用素Aを持つ径路積分の評価に使うことができる。例えば，

$$A=\frac{\mathrm{i}m}{\hbar}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right),\ c(t)=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}F(t) \tag{3.36}$$

と選ぶと，積分(3.33)は駆動された調和振動子に対する径路積分(前の節を見よ)に変る。そのさい，積分$\int\dot{q}^2\mathrm{d}t$は(部分積分により，境界項を除いて)$-\int q\ddot{q}\,\mathrm{d}t$の形に表わされる。そして(3.33)式はこの積分に対して

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}([F],\ A^{-1}[F])\right)$$

を与える。これは（境界項を除き）$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q_{class}]\right)$ と一致することが示される。こうして駆動された振動子に対する伝播子（3.30）あるいは（3.24）が，数係数を除いて，得られる。

注意　3　数係数の違いは，二つの評価の方法における，径路積分の測度の違いから生じている。しかし，多くの場合に数係数は重要でない。その上，振動子の径路積分に対して前の節でしたように，数係数は径路積分の関数の形の評価と独立に見出すことができる。

（3.32）式の両辺のベクトル $\boldsymbol{c}$ の成分についての微分をとると，それは被積分関数の中にベクトル $\boldsymbol{q}$ の対応する成分との積を導入することと同等である。したがって，次の式が多項式 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})$ に対して成り立つ。

$$\int\left|\det\frac{A}{2\pi}\right|^{1/2}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}q_i\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})\exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{q},\ A\boldsymbol{q})+(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{q})\right)$$
$$=\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{c}}\right)\exp\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{c},\ A^{-1}\boldsymbol{c})\right)\quad。$$

どんな関数も，任意の精度で，多項式によって近似できるから，この式は，実際上，どんな関数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})$ に対しても成り立つ。

これを関数（径路）の場合に一般化すると，有用な式

$$\int\mathrm{d}[q]\,\boldsymbol{\Phi}[q]\exp\left(-\frac{1}{2}([q],\ A[q])+([c],\ [q])\right)$$
$$=\boldsymbol{\Phi}\left[\frac{\delta}{\delta c}\right]\exp\left(\frac{1}{2}([c],\ A^{-1}[c]\right)\tag{3.37}$$

を得る。ここで $\boldsymbol{\Phi}$ は汎関数であり，$\delta/\delta c(t)$ は汎関数微分である。この式で $c\equiv0$ とすると，

$$\int\mathrm{d}[q]\,\boldsymbol{\Phi}[q]\exp\left(-\frac{1}{2}([q],\ A[q]\right)$$
$$=\boldsymbol{\Phi}\left[\frac{\delta}{\delta c}\right]\exp\left(\frac{1}{2}([c],\ A^{-1}[c])\right|_{c\equiv0}\tag{3.38}$$

が得られる。この式によってガウス測度を持つどんな汎関数も積分できる。

結果は級数の形で得られ，実際，そのような積分に対する摂動展開を与える。

注意 4 ガウス積分(3.15)は Re $a<0$ をみたす任意の複素パラメーター a に対して収束する。それに対応して，そのすべての一般化，例えば(3.32)，(3.33)，(3.37)および(3.38)，は正のエルミート部分を持つ作用素 A に対して意味を持つ。(3.36)式のような純粋の反エルミート作用素 A に対しては，正しく定義するには，正のエルミート部分を導入し，それがゼロになる極限をとらなければならない。

4. 連続測定と測定される系の発展

測定の量子論において径路積分の方法へと導く主なアイデアは第1章で定式化された。この章ではその方法のもっと正確な定式化を与える。それは測定される系の発展の記述とこの発展に対する一般化されたユニタリー性の条件を含んでいる。連続測定の下での発展は量子的および古典的特徴をどちらも持つことを論じる。発展の量子的な描像から古典的な描像への移行をこの定式の枠内で追跡するのが便利なのはこのためである。

径路積分を直接計算するかわりに，測定振幅（この方法の主な目標）を評価する簡単な手段として有効ラグランジァン（有効作用）の方法を考える。

4.3節と4.4節は連続測定されている系の発展を扱う。それによって，系の振舞いについて情報を得ることはその振舞いに影響することがわかる。4.3節ではこのことを一般的な形で示し，4.4節では自由粒子が位置の測定（モニター）によって散乱される特殊な例を考える。

4.3節と4.4節は，初めて読むときは，飛ばしてよい。

4.1 測定振幅

測定の量子論が，近年，盛んに論じられているのは，その概念的な興味（それは量子力学のまさに始まりの日から絶えず論じられてきた）のためばかりでなく，実用的な目的のためでもある。実際，測定の精度が今日では非常に高くなったので，多くの場合に量子効果が重要である。これは光学測定について本当であり，また，重力波アンテナで行われるような高精度の力学的測定についても本当である。量子測定の実用的な面がはじめて真面目に研究さ

れたのは，重力波の検出の理論に関連してである (Braginsky 1967)。

測定とは，実際には，ふつうかなり複雑なものであって，多くの場合，瞬間的と考えることはできない。測定が有限な時間続くことは量子連続測定の理論の現実的な応用を与えている。ここで論じる径路積分の方法は，その理論において，もっとも効率のよい方法であることがわかった。この方法のアイデアはファインマンの論文 (Feynman 1948) の短い注に提案されている。著者はファインマンの提案に気付かずにこの方法を発展させた (Mensky 1979 a，b，1983 a)。ファインマンの考えを仕上げる試み (私の見るところでは，成功しなかった) がいくつかされている (例えば，Bloch and Burba 1974 とそこに引用されている文献)。著者のと近い結果が，違う方法によって，Khali (1981) と Barchielli et al (1982) によって得られている。彼らは連続測定のモデルを，間隔がゼロになったときの瞬間的測定の系列として構成している。量子連続測定の理論はさらに Caves (1986，1987) によって，径路積分を使って，発展された。

量子連続測定に対する径路積分の方法は二つの異なったやり方で根拠づけることができる。

- 一つは，次々に行われる測定から連続測定への極限過程という枠組みの中で，測定の径路積分による記述を導くことである。この場合，ふつうの (フォン・ノイマンの) 記述のしかたを，次々に行われる測定の中の瞬間的な測定に適用することができる。この導き方は第 2 章の最後で簡単に考察した。さらにくわしい導き方は Mensky (1983 a) にある。

- もう一つのやり方は対応する確率振幅を，ファインマンの径路積分を成す部分振幅の物理的意味から，直接に導くことである。この方法は第 1 章で適用され，さらにくわしいことは Mensky (1983 a) に述べられている。

初めのやり方は結果を説得力あるものとするためには必要であるが，二番

目のやり方のほうがずっと自然でありまた応用範囲が広い。ここでは径路積分へと導く議論はくり返さない（第1章を見よ）。その代わりにその最終的な定式化を与え，連続測定のいろいろなデータの確率ばかりでなく，そのような測定を受けている系の発展をも考える。

量子系がラグランジアン

$$L=L(q,\ \dot{q},\ t)$$

と作用汎関数

$$S[q]=\int_{t'}^{t''} L(q,\ \dot{q},\ t)\,\mathrm{d}t$$

によって特徴づけられるとしよう。ここで q は（一般には多次元の）配位空間の点である。そのとき，系が時刻 t' における位置 q' から時刻 t'' における q'' へ移行するための確率振幅，すなわち系の**伝播子**は，**ファインマンの径路積分**

$$U(t'',\ q''|t',\ q')=\int_{q'}^{q''}\mathrm{d}[q]\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{4.1}$$

によって表わされる[1]。積分はすべての径路

$$[q]=\{q(t)|t'\leq t\leq t''\}$$

にわたり，それぞれの径路は上に述べた点

$$q(t')=q',\ q(t'')=q''$$

を結ぶ[2]。

時間間隔 $[t', t'']$ の間に測定が行われず，遷移に際して系が選ぶ道について何の情報も得られない場合に，この式は成り立つ（これが，すべての道についての積分が必要な理由である）。

時間間隔 $[t', t'']$ の間にある**連続測定**[3] をしたとすると，この径路についてのある情報が，少くとも原理的には，得られる。この情報を（正定値の）汎関

[1] 径路積分の定義と評価の方法は第3章に与えられている。しかしそれは，この方法の主な考え方と簡単な応用のためには，必要ではない。

[2] 径路積分の記号の中にこれらの点を表わした。

[3] ここでは連続測定を研究するのだが，実際には，瞬間的測定は連続測定の特殊な場合と考えることができる。それは径路 $[q]$ の振舞いについての情報を，固定した時刻 t の近傍でだけ，与えるものである。

数 w_α,

$$0 \leq w_\alpha \leq 1,$$

で表わそう。これは，測定データ α の知識によって，$w_\alpha[q]$ が 1 に近い径路 $[q]$ は起こりやすいと推定できることを意味する。反対に，$w_\alpha[q]$ がゼロに近い径路 $[q]$ は，測定データ α が与える情報によって，ありそうもないと考えられる。実際，連続測定の結果（データ）α は，対応する汎関数 w_α を指定することによって，完全に特徴づけられる。

与えられた型の連続測定が行われ，そのデータが α であったとすれば，系が (q', t') から (q'', t'') へ移行する確率振幅は制限された（重みをつけた）径路積分

$$U_\alpha(t'', q'' | t', q') = \int_{q'}^{q''} \mathrm{d}[q]\, w_\alpha(q)\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{4.2}$$

に等しい。

汎関数 w_α が値 1 あるいは 0 だけをとる特殊な場合には，積分 (4.2) は $w_\alpha[q]=1$ であるような径路の集合に制限されると考えることができる。この集合を対応する測定データと同じ文字 α で表わすのが便利である。すると積分 (4.2) は

$$U_\alpha(t'', q'' | t', q') = \int_\alpha \mathrm{d}[q]\, \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{4.3}$$

の形をとる。この式は式 (4.2) よりもさらに直接的な解釈ができる：積分は測定データと矛盾しない径路についてだけ行われるのである。連続測定の典型的な例としての位置のモニターは 4.2 節で考察する。

一般の場合には，制限された積分 (4.3) は，α を $w_\alpha[q]$ が十分に 1 に近い（例えば e^{-1} より大きい）径路 $[q]$ の集合と定義すれば，正しく重みをつけた積分 (4.2) の近似的な表現と考えることができる。確率振幅 (4.2) を**測定振幅**と呼ぶことにしよう。測定振幅によっていろいろな測定データに対する確率を推定できることは直観的に明らかである。$|U_\alpha|^2$ が極大になるデータ

α_{class} がもっとも確率が高い[4]。$|U_\alpha|^2$ がその極大値 $|U_{\alpha_{class}}|^2$ に近いようなデータ α も十分に可能性が高い。$|U_\alpha|^2$ がずっと小さい α は実際上起こりそうもない。

この粗い推測は多くの実用上の目的に対しては十分であることがわかり，後に，作用不確定性原理と呼ばれる便利な定性的な結果の基礎として採用される。しかし，もっと正確な定式化のためには対応する確率測度を定義しなければならない。4.3 節でそれを行う。

しかしその前に，4.2 節で，重みの汎関数 w_α の選び方についての重要な疑問と振幅 U_α を評価する方法を考える。

4.2 有効ラグランジアン

測定振幅 $U_\alpha(t'', q''|t', q')$ は連続測定を扱う径路積分の方法でもっとも重要な対象である。それは重みをつけた径路積分あるいは制限された径路積分として (4.2) 式あるいは (4.3) 式によって定義される。測定振幅をどのようにして評価できるかを問うことは自然である。

この質問への直接の答えは径路積分を評価するいろいろな方法を指示することである。それらの方法は第 3 章の 3.3 節で簡単に述べられ，ガウス型径路積分の評価が第 3 章の 3.3 節と 3.4 節でややくわしく考察された。しかし，測定振幅を見出す間接的な方法（この方法も 3.3 節で述べた）があり，それは多くの場合にもっと簡単なやり方に導く。それはシュレーディンガー方程式を解くことである。このやり方は多くの人にとって慣れたものであり，非線形の系の場合にはこの方が効率がよい。この方法を少しくわしく考察しよう。

出発点はファインマンの伝播子 (4.1) がシュレーディンガー方程式

---

[4] このデータが古典論の予言と一致することがあとでわかる。これは作用 $S[q]$ が古典軌跡 $[q_{class}]$ の近傍ではゆっくりと変化し，したがって，振幅 $\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right)$ がそこでは干渉によって強め合うからである。

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t''}U(t'',\ q''|t',\ q')=\hat{H}''U(t'',\ q''|t',\ q') \tag{4.4}$$

と初期条件

$$U(t',\ q''|t',\ q')=\delta(q''-q') \tag{4.5}$$

をみたすことである。$\hat{H}$ は考える系の量子ハミルトニアンである。それは古典ハミルトニアン

$$H(q,\ p,\ t)=p\dot{q}-L(q,\ \dot{q},\ t),\ \ p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

からおきかえ $p\to-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial q}$ によって得られる(この式の多次元への拡張は簡単である)。(4.4) 式における作用素 $\hat{H}''$ のプライムはそれが作用素の第1の引数 q'' に作用することを示す。

伝播子を見出すには，積分 (4.1) を評価するかわりに，(4.4) 式を初期条件 (4.5) とともに解けばよい。多くの場合，このやり方は径路積分の直接の評価よりも簡単である。

ここで測定振幅 (4.2) に移ると，重みの汎関数 $w_\alpha[q]$ が時間積分の指数の形[5]

$$w_\alpha[q]=\exp\left(-\gamma\int_{t'}^{t''}K_\alpha(q,\ \dot{q},\ t)\,\mathrm{d}t\right) \tag{4.6}$$

に表わせるとすれば，その評価に同じ方法を使えることが分かる。そのとき径路積分 (4.2) はファインマン積分と完全に類似の形

$$U_\alpha(t'',\ q''|t',\ q')=\int_{q'}^{q''}\mathrm{d}[q]\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S_\alpha[q]} \tag{4.7}$$

に書けるが，ただし，そこでは**有効作用**

$$S_\alpha[q]=S[q]+\mathrm{i}\hbar\gamma\int_{t'}^{t''}K_\alpha(q,\ \dot{q},\ t)\,\mathrm{d}t$$

が使われる。これは有効ラグランジアンによって書き直せる：

$$S_\alpha[q]=\int_{t'}^{t''}L_\alpha[q,\ \dot{q},\ t]\,\mathrm{d}t$$

---

[5] 測定精度の特性として，応用のさい自然に現われるので，便宜上 γ という因子を取り出してある。

$$L_\alpha = L + \mathrm{i}\hbar\gamma K_\alpha \quad 。$$

この定義が人工的でないことを見るために，**位置のモニター**あるいは**径路の測定**と呼ばれる，連続測定の典型的な例を考えよう。それは各時刻 t において位置 $q(t)$ をある最終的な誤差 Δa[6] で推定することである。この推定が $a(t)$ であるとすれば，それは，現実の位置 $q(t)$ が値 Δa 以上は $a(t)$ から違わないことを意味する。

この言葉による測定の記述は不等式

$$|q(t) - a(t)| \leq \Delta a \tag{4.8}$$

によって数学的に厳密にすることができる。測定の結果，

$$[a] = \{a(t) \mid t' \leq t \leq t''\}$$

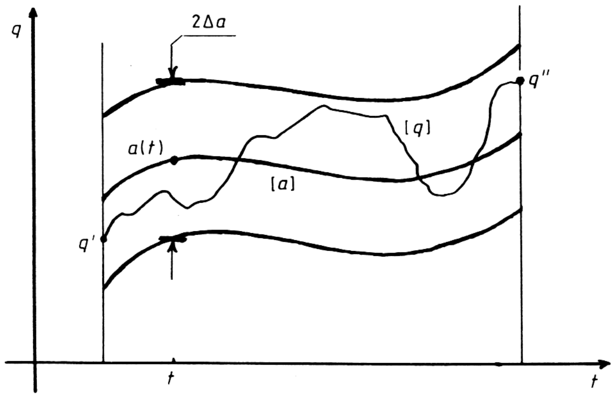


図 4.1　：位置のモニター（径路の測定）を記述する帯 $\alpha = I_{[a]}$

は径路の集合 $I_{[a]}$ を，径路 $[a]$ が中央にある幅 $2\Delta_a$ の帯として定義する（図4.1)。この場合の測定振幅 $U_{[a]}$ は帯 $\alpha = I_{[a]}$ にわたる径路積分 (4.3) として評価できる。このやり方は Mensky (1979 a）によって行われた。

[6] すべての時刻 t に対して誤差 Δa は同じと考えるが，誤差 $\Delta a(t)$ が時刻への任意の依存性を持つとしても，まったく同様に扱うことができる。

注意　1　この分析によって，位置のモニターに対する別の名前が正当化される。それは**径路の測定**と呼ぶことができる。この測定の結果は，当然，径路 $[a]$ によって表わされる。しかしそれは，実際には，一つの径路でなく，この径路のまわりの有限な幅を持つ帯によって表わされるのである。

この定義は，まったく見通しがよいが，現実的でもなければ，取り扱いが簡単でもない。それは，矩形の特性を持つ測定装置によって，各時刻 t に位置 $q(t)$ を測定した場合に対応している。測定データ $a(t)$ が与えられたとすると，そのような装置は，現実の位置 $q(t)$ が間隔

$$[a(t)-\Delta a,\ \ a(t)+\Delta a]$$

の中に，各点に対して同じ確率密度で存在し，この間隔の外には確かに存在しないことを保証する。いうまでもなく，実際の測定装置は，点 $a(t)$ のまわりにあるなめらかな確率分布を持つ，違うタイプの情報を与える。そのような装置による測定の記述は第 2 章の 2.3 節で与えた。ここではその考察はくり返さない。それに代えてその場合の測定を，直接，径路によって記述する。このほうがずっと簡単であることが示される。

考えている測定データはある径路 $[a]$ である。この径路は現実の径路 $[q]$ の，測定データにもとづいて与えることのできる，最良の推定であることはもちろんである。しかし，$[a]$ のある近傍の中の径路は実際には同等に起こりうる（あるいは $[a]$ よりごくわずかに起こりにくいだけである）。矩形の特性を持つ装置に対してはこの近傍は不等式 (4.8) によって，すなわち，鋭い端を持つ帯として，記述される。鋭くない端を持つ帯に対しては，われわれは $[q]$ の $[a]$ からの 2 乗平均偏差 $\rho[q-a]$

$$\rho^2[q-a]=\overline{(q-a)^2}=\frac{1}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}(q(t)-a(t))^2\,\mathrm{d}t$$

にもとづく定義を採用することができる。

位置のモニターがデータ $[a]$ を与えたとすれば，われわれは $\rho[q-a]$ が大きくなく，Δa より大きくないことを知る。このことは，(4.2) の重み汎関数

$w_a[q]$ を，$\rho \le \Delta a$ に対しては 1 に近く，$\rho \gg a$ に対してはゼロに近くとらなければならないことを意味する。多くの場合，重み汎関数をガウス型

$$w_a[q]=\exp\left(-\frac{2\rho^2[q-a]}{\Delta a^2}\right) \tag{4.9}$$

にとれば十分に現実的である。

この本の計算のほとんどで，ガウス型径路積分に導くガウス型の重みを使うので，その適用可能性を吟味しておかなければならない。重み汎関数 w_a は測定データ a から導かれる情報を記述する。したがってその汎関数の選び方は研究しようとする測定がどんなタイプのものかによる。厳密に言えば，われわれは実際の測定装置あるいは実際の測定の状況を分析して，その分析から重み汎関数の形を導かなければならない。径路積分の枠の中のすべての計算の結果は汎関数の選ばれた形に依存する。

けれども，重み汎関数の僅かな変化は計算結果をひどくは変えないと考えてよいだろう。少くとも大きさの程度の推定に限られるすべての計算（それはこの本のほとんどの計算の主な目的である）に対しては，汎関数の定義の細かいところは重要でないと期待してよいだろう。そうであれば，計算にもっとも便利な汎関数を選べばよい。

いろいろ試みた経験は，実際，そのとおりであることを示している。座標のモニターについての一番最初の論文 (Mensky 1979 a) で，著者はこの型の測定を汎関数

$$w'_{[a]}[q]=\begin{cases} 1, & |q(t)-a(t)| \le \Delta a \, (t' \le t \le t'') \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.10}$$

を使って記述した。この選び方は測定装置が矩形の特性を持つ場合に対応している。この汎関数を使う計算は非常に複雑だった。次の論文 (Mensky 1979 b) ではガウス型 汎関数 (4.9) が使われたが，それはずっと使いやすくて，またずっと実状に合っていた。二つの計算の結果は大きさの程度までは一致しており，それは現実の実験の解析には十分な精度であった。

いうまでもなく，この例は何事をも証明するわけではなく，重み汎関数の

選び方の問題はさらに分析を必要とするが，われわれは大部分の考察でガウス型汎関数を使うことにする。(訳注)

*ガウス型汎関数 (4.9) は

$$w_{[a]}=\exp\left[-\frac{2}{\varkappa}\int_{t'}^{t''}(q(t)-a(t))^2\mathrm{d}t\right]$$

の形に書ける。パラメーター $\varkappa$ は測定の精度による。それは有効測定誤差 Δa と

$$\varkappa=T\Delta a^2 \tag{4.11}$$

によって結ばれている。ここで $T=t''-t'$ である。有効誤差 Δa は測定装置の素朴に定義される誤差 λ とは一致しないことを注意しなければならない。その理由は，二つのパラメーターを正しく比較するには，測定の時間分解能 τ を考慮しなければならないからである。実際にはパラメーター $\varkappa$ は T によらない定数でなければならない。そのヒントは以下の議論に見られる。

モニターが本当に連続的ならば，伝播子に対する式は間隔 T が異なっても成り立つはずである。このとき (第 10 章を見よ) 汎関数 $w_{[a]}=w[a]_{t'}^{t''}$ (初めと終りの時刻を明示した) は (パラメーターで指定した径路の積に対する自然な定義によって) 乗法則

$$w[a]_{t''}^{t'''}\,w[a]_{t'}^{t''}=w\Big([a'][a]\Big)_{t'}^{t'''}$$

をみたすはずである。この性質は，パラメーター $\varkappa$ が定数であれば，みたされる。

非干渉化を具体的に扱うモデルの助けを借りて (Konetschnyi, Mensky and Namiot 1993, 11.5.1 節をも見よ)，定数のパラメーター $\varkappa$ は，連続測定の中の要素的な測定のパラメーター (時間分解能と測定誤差) によって

$$\varkappa=\tau\lambda^2$$

と表わされることが示された。

(訳注) 原書はここに注 7 があるが，日本語版を仕上げる際，著者はこれを除いた。したがって，この章の以下の注の番号は原書からずれている。

* ここからこの節の最後までは，著者が日本語版のために修正・追加したものである (訳者)。

したがって次のような描像が得られる：座標のモニターは，実際には，座標の一連の要素的な（さらに還元できない）測定によって，実現される。個々の要素的な測定は，誤差 τ できまる時刻において，座標 q の値を誤差 λ で与える。時間間隔 $T\gg\tau$ の間に行われる連続測定は $\varkappa=\tau\lambda^2$ をもつガウス型重み汎関数によって制限された径路積分によって記述される。

連続測定の有効精度はパラメーター Δa によってきまり，それは，$\Delta a^2=\varkappa/T$ によって，連続測定の全体の時間 T によっている。このパラメーターは形式的なものではなくて，直接物理的意味を持っている。例えば，座標のモニターの後の運動量の不確定は $\delta p=\hbar/\Delta a$ である (Konetschnyi, Mensky and Namiot 1993 を見よ)。

座標のモニターに対するガウス型重み (4.9) は 2 次の虚数項

$$K_{[a]}(q,\ \dot{q},\ t)=(q-a(t))^2$$

と結合定数 $\gamma=2/\varkappa$ を持つ有効ラグランジアンに導く。

4.3 連続測定下の量子系の発展

4.1 節では，いろいろな測定データの確率の推定のために，測定振幅を使うことを簡単に論じた。その振幅は，測定の下での系の発展を記述するためにも，使うことができる。

(4.1) 式で定義される 2 点関数 $U(t'',\ q''|t',\ q')$ の代わりに，位置の固有ベクトルについてのその行列要素が考えている 2 点関数に等しいように，対応する作用素 $U_{t''t'}$ を導入する：

$$U(t'',\ q''|t',\ q')=\langle q''|U_{t''t'}|q'\rangle$$

注意　3　位置の固有ベクトル $|q'\rangle$ は位置作用素の固有ベクトルである：$\hat{q}|q\rangle=q'|q'\rangle$。この固有ベクトルは厳密な意味でのヒルベルト空間のベクトルではなく（それは規格化できない），ふつうはデルタ関数によっ

て規格化される：$<q'|q''>=\delta(q'-q'')$。それらは $\int|q'><q'|\mathrm{d}q'=1$ の意味で完全系を成している。状態 $|\psi>$（これは状態のヒルベルト空間のベクトルであるとする）を記述する波動関数 $\psi(q')$ の値は位置の固有ベクトルと状態ベクトルとのスカラー積，$\psi(q')=<q'|\psi>$ に等しい。作用素 $U_{t''t'}$ を積分作用素

$$(U_{t''t'}\psi)(q'')=\int U(t'',\ q''|t',\ q')\psi(q')\mathrm{d}q'$$

と考えるとき，関数 $U(t'',\ q''|t',\ q')$ はその核である。

2点関数 $U(t'',\ q''|t',\ q')$ が伝播子 (4.1) に等しいならば，対応する作用素 $U_{t''t'}$ は正に発展作用素である。それは，時刻 t' における状態 $|\psi_{t'}>$ から時刻 t'' における状態 $|\psi_{t''}>$ への系の発展を次のように記述する：

$$|\psi_{t''}>=U_{t''t'}|\psi_{t'}> \quad 。$$

系の量子ハミルトニアン $\hat{H}_t=H(\hat{q},\ \hat{p},\ t)$ が分かっていれば，発展作用素を

$$U_{t''t'}=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\hat{H}_t\mathrm{d}t\right)$$

と表わすことができる。この作用素は，式

$$U^{\dagger}{}_{t''t'}U_{t''t'}=1$$

が成り立つという意味で，ユニタリーである[7]。

系に対して間隔 $[t',\ t'']$ の間に連続測定が行われ，データ α が得られたとしよう。そのとき，測定振幅 (4.2) に対応する作用素 $U_{t''t'}{}^{\alpha}$

$$U_{\alpha}(t'',\ q''|t',\ q')=<q''|U_{t''t'}{}^{\alpha}|q'>$$

が発展作用素の役割をする (Mensky 1988 a)。測定を（与えられたデータとともに）受けている系の発展は式

$$|\psi_{t''}{}^{\alpha}>=U_{t''t'}{}^{\alpha}|\psi_{t'}> \tag{4.12}$$

---

[7] エルミート共役は $<\psi|A^{\dagger}|\psi>=<\psi|A|\psi>^*$ によって定義されるので，（条件 $U^{\dagger}U=1$ をみたす）ユニタリー作用素はスカラー積を保存する：

$|\psi'>=U|\psi>$，$|\phi'>=U|\phi>$ に対し $<\phi'|\psi'>=<\phi/\psi>$。

によって記述される。

この発展の結果は，もちろん，測定データ α による。この意味で作用素 $U_{t''t'}{}^{\alpha}$ は**部分発展作用素**と呼ばれる。可能なすべての測定データ α に対する系の発展の完全な描像はすべての α に対する部分発展作用素の集合によって記述される。

系の状態の発展に対する式(4.12)は測定データ α が知られているときに成り立つ。しかし，測定結果についての情報に依存しないような発展の記述も重要である。それは二つの異なる状況において重要である：

- 測定が終ったが結果(データ)を知らないときに，系の発展を分析しようとする場合：**後験的分析**。
- 測定が行われる前に，したがってその出力についての情報を原理的に得られないときに，系の可能な発展を分析しようとする場合：**先験的分析**。

どちらの場合にも‘非選択式測定’あるいは‘非選択式分析’という言葉を使うことができる。非選択式測定の分析(あるいは，もっと正確には，測定の非選択式分析)のためには，可能な測定データ α のすべてを取り入れるように，そのすべてにわたってある種の和を行わなければならない。

ここは，第1章の1.2節で議論された可能事象についての和のいろいろな型を思い出す潮時である。そこではわれわれは(Feynman and Hibbs (1965)に従って)次の二つの異なる型の可能事象があり二つの異なる型の和の取り方があることを論じた：

- 古典物理学に特徴的な古典的すなわち排他的な可能事象と，それらの確率の和，
- および，量子物理学に特徴的な量子的すなわち干渉する可能事象と，それらの確率振幅の和。

古典的可能事象は，それらが(正しい近似で)古典的と記述できるようなある過程に支配されているとすれば，量子論の枠内でさえ，起こりうることをわれわれは見た。測定の異なるデータはいつでも古典的可能事象であって，異なる測定データについて加えようとするならば，振幅でなく確率を加えな

くてはならない。

測定データが α であることが知られているならば，(4.12) 式に対応して，状態 $|\psi_{t'}>$ は発展ののち $|\psi_{t''}{}^{\alpha}>$ に変る。測定データが知られていない場合（非選択型の状況）には発展の結果は $\sum_{\alpha}|\psi^{\alpha}_{t''}>$ であるはずだと考えられるかも知れない。しかしこれは振幅の和であって，古典的可能事象 α に対しては間違っている。その代わりに，状態ベクトルから密度行列への移行を，和をとる前に，行わなければならない。

その移行のために純粋状態 $|\psi_{t'}>$ から始めよう。同じ状態は，状態ベクトルでなく，密度行列

$$\rho_{t'}=|\psi_{t'}><\psi_{t'}|$$

で記述することができる。測定がデータ α を生じるという条件の下では，この状態の発展によって，密度行列

$$\rho^{\alpha}{}_{t''}=|\psi^{\alpha}{}_{t''}><\psi^{\alpha}{}_{t''}|$$

で記述される状態が導かれる。これは，(4.12) 式によって，密度行列で表わした発展の法則

$$\rho_{t''}{}^{\alpha}=U_{t''t'}{}^{\alpha}\rho_{t'}(U_{t''t'}{}^{\alpha})^{\dagger} \tag{4.13}$$

を与える。

(4.13) 式は純粋な初期状態に対して導かれたが，混合状態の場合にも同様に成り立つことが分かる。実際，密度行列はすべて，混合状態を表わす場合でさえ，

$$\rho_{t'}=\sum_{i}p_i|\psi_{t'}{}^{(i)}><\psi_{t'}{}^{(i)}|$$

の形に表わすことができる。ここで正の数 p_i は条件

$$\sum_{i}p_i=1$$

をみたし，これは密度行列の規格化条件

$$tr\rho_{t'}=1 \tag{4.14}$$

と同等である。これらの数は確率という意味を持ち，混合状態 $\rho_{t'}$ は，純粋状態の一つ $|\psi_{t'}{}^{(i)}>$，i 番目の状態，が確率 p_i で生じるという主張によって同等

に記述することができる。したがって混合状態の発展は，純粋状態の集合の発展として，記述できる。これは，同じ確率 p_i ではあるが，しかし違う純粋状態の新しい混合状態

$$\rho_{t''}{}^{\alpha}=\sum_i p_i|\psi_{t''}{}^{(i)\alpha}><\psi_{t''}{}^{(i)\alpha}|$$

に導く。ここで

$$|\psi_{t''}{}^{(i)\alpha}>=U_{t''t'}{}^{\alpha}|\psi_{t'}{}^{(i)}>$$

は発展則 (4.12) によって得られるものである。結果として得られる密度行列 $\rho_{t''}{}^{\alpha}$ が混合初期状態に対しても (4.13) の形に表わされることは明らかである。

いまや，測定データが知られていない，非選択的な場合に移ることはやさしい。(4.13) 式を異なる測定データ α について加えれば十分である。その結果の式は

$$\rho_{t''}=\sum_{\alpha}\rho_{t''}{}^{\alpha}=\sum_{\alpha}U_{t''t'}{}^{\alpha}\rho_{t'}(U_{t''t'}{}^{\alpha})^{\dagger} \tag{4.15}$$

である。

((4.14) 式の意味で) 規格化された密度行列 $\rho_{t'}$ が与えられると，発展の結果として $\rho_{t''}$ が得られるが，記述が正しいならば，この密度行列もまた規格化されていなくてはならない：

$$\mathrm{tr}\rho_{t''}=1 \quad 。$$

(任意の規格化された初期密度行列に対して) このことは条件

$$\sum_{\alpha}(U_{t''t'}{}^{\alpha})^{\dagger}U_{t''t'}{}^{\alpha}=1 \tag{4.16}$$

がみたされるならば，そしてそのときだけ，成り立つことを証明することができる。すべての部分発展作用素の集合についてのこの条件は，連続測定を受けている系に対する，**一般化されたユニタリー条件**の役目をする。この条件の物理的内容はふつうのユニタリー条件の場合と同じく，確率の保存である[8]。

すぐ前のいくつかの式で測定データ α についての和をとっている。しか

[8] Larsen (1986) は発展則 (4.15) のいくつかの数学的な面を研究した。

し，すべてのデータの集合は，もちろん，(離散的でなくて) 連続である。したがって和は，もっと厳密に，測度 $\mu(\alpha)$ の積分として定義しなければならない。すると (4.15) と (4.16) 式は

$$\rho_{t''}=\int d\mu(\alpha)\, U_{t''t'}{}^{\alpha}\rho_{t'}(U_{t''t'}{}^{\alpha})^{\dagger} \tag{4.17}$$

$$\int d\mu(\alpha)(U_{t''t'}{}^{\alpha})^{\dagger}\, U_{t''t'}{}^{\alpha}=1 \tag{4.18}$$

という形をとる。

別々の測定データに (したがって別々の測定チャンネルに) 対応する部分密度行列 $\rho_{t''}{}^{\alpha}$ は規格化されていないことを強調しなければならない。$\mathrm{tr}\rho_{t''}{}^{\alpha}$ の値は測定がデータ α を生じる確率密度という意味を持つ。測定データが無限小間隔 $[\alpha,\ \alpha+d\alpha]$ にある確率は

$$\mathrm{prob}(\alpha,\ d\alpha)=\mathrm{tr}\rho_{t''}{}^{\alpha}d\mu(\alpha) \tag{4.19}$$

である。測定結果が可能なデータの集合 A にある確率は

$$\mathrm{prob}(\alpha\in A)=\int_A \mathrm{tr}\rho_{t''}{}^{\alpha}d\mu(\alpha) \tag{4.20}$$

である。一般化されたユニタリー条件 (4.18) は測定データの完全な集合に対する確率が 1 であることを保証する。

4.4 測定媒体による散乱

4.3 節では連続測定が測定を受けている量子系の発展を変えることを見た。測定される系の発展は，測定のすべての可能なデータ α に対応する部分発展作用素 $U_{t''t'}{}^{\alpha}$ の集合によって記述される。測定データが知られていなければ (非選択実験)，時刻 t' において密度行列 $\rho_{t'}$ から出発すると，系は (4.17) 式によって決定される状態で終る。この発展則をもつとくわしく調べよう。

われわれの目的には時間間隔 $[t',\ t'']$ を固定してよいから，$t'=0$ として $t''=T$ として $U_{T0}{}^{\alpha}=U_{\alpha}$ とするほうが便利である。すると発展則は，(4.17) の代わりに，

$$\rho_T = \int d\mu(\alpha)\, U_\alpha \rho_0 U_\alpha{}^\dagger \tag{4.21}$$

となる。一般化されたユニタリー条件の式(4.18)は

$$\int d\mu(\alpha)\, U_\alpha{}^\dagger U_\alpha = 1 \tag{4.22}$$

となる。作用素 U_α の行列要素は(4.2)式

$$U_\alpha(q',\ q) = \langle q' | U_\alpha | q \rangle = \int_q^{q'} d[q]\, w_\alpha[q]\, e^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{4.23}$$

で与えられる。ここで積分は q で始まり q' で終る径路について行われる。

座標表示を使って，密度行列を行列要素

$$\rho_t(q_1,\ q_2) = \langle q_1 | \rho_t | q_2 \rangle$$

によって表わすと，発展則として次の式を得る：

$$\rho_T(q_1',\ q_2') = \int dq_1 \int dq_2$$

$$U(q_1',\ q_1 | q_2',\ q_2)\, \rho_0(q_1,\ q_2)$$

ここで記号

$$U(q_1',\ q_1 | q_2',\ q_2)$$

$$= \int d\mu(\alpha)\, U_\alpha(q_1',\ q_1)\, U_\alpha{}^*(q_2',\ q_2) \tag{4.24}$$

を導入した。一般化されたユニタリー条件は，この記号を使うと，次のように書ける：

$$\int dq_1' U(q_1',\ q_1 | q_1',\ q_2) = \delta(q_1 - q_2) \quad 。$$

4点関数(4.24)は**超伝播子**(すなわち，密度行列に対する発展作用素)であるが，ただし，連続測定を受けている系に対するものである。(4.23)式を使うと超伝播子に対して

$$U(q_1',\ q_1 | q_2',\ q_2) = \int_{q_1}^{q_1'} d[q_1] \int_{q_2}^{q_2'} d[q_2]\, w([q_1],\ [q_2])$$

$$\times \exp\left(\frac{i}{\hbar}(S[q_1] - S[q_2])\right) \tag{4.25}$$

を得る。ここで

$$w([q_1],\ [q_2])=\int \mathrm{d}\mu(\alpha)\, w_\alpha[q_1]\, w_\alpha[q_2]$$

である。これらの一般的な式の具体的な場合を，位置をモニターされている自由粒子を例として，示そう。

超伝播子 (4.25) の評価は調和振動子のあるクラスの連続測定（スペクトル測定と呼ばれる）に対して Mensky (1988 a) によって行われた。(この型の測定は第 5 章の 5.4 節で考える。) 位置のモニター (4.9) は，実際は，スペクトル測定の特殊な場合であり，また，(1 次元の) 自由粒子

$$L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

は振動子の特殊な場合 (ゼロ振動数，$\omega=0$，に対応する) である。Mensky (1988 a) によれば，径路積分 (4.23) と積分 (4.24)[9] を行うと，この場合の超伝播子は

$$U(q_1',\ q_1|q_2',\ q_2)=N\exp\Bigg(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar T}[(q_1'-q_1)^2-(q_2'-q_2)^2]$$
$$-\frac{1}{3\Delta a^2}[(q_1-q_2)^2+(q_1'-q_2')^2+(q_1-q_2)(q_1'-q_2')]\Bigg)$$

となる。

3 次元自由粒子

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

と，その位置のモニターがデータ

$$[\boldsymbol{a}]=\{\boldsymbol{a}(t)|0\le t\le T\}$$

を与える場合への拡張は簡単である。モニターを記述するガウス型重み汎関数を

$$w_{[\boldsymbol{a}]}[\boldsymbol{r}]=\exp\left(-\frac{2}{T\Delta a^2}\int_0^T(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}(t)^2\mathrm{d}t\right) \qquad (4.26)$$

とすると，超伝播子の形は

[9] この積分の測度の正しい選び方は $\mathrm{d}\mu(\alpha)=\mathrm{d}[a]=\Pi_{t=0}^{T}\mathrm{d}a(t)$ であることが分かる (Mensky 1988 a)

$$U(\boldsymbol{r}_1',\ \boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{r}_2',\ \boldsymbol{r}_2)=N\exp\Big(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar T}[(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_1)^2-(\boldsymbol{r}_2'-\boldsymbol{r}_2)^2]$$

$$-\frac{1}{3\varDelta a^2}[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2+(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_2')^2+(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_2')]\Big)$$

となる。この超伝播子を用いて，(精度 $\varDelta a$ をもって) 位置をモニターされている自由粒子の発展は

$$\rho_T(\boldsymbol{r}_1',\ \boldsymbol{r}_2')=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 U(\boldsymbol{r}_1',\ \boldsymbol{r}_1|\boldsymbol{r}_2',\ \boldsymbol{r}_2)\rho_0(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2) \tag{4.27}$$

によって記述される。

密度行列 ρ_T の状態 $|\boldsymbol{p}>$ での平均値

$$<\boldsymbol{p}|\rho_T|\boldsymbol{p}>$$

を計算しよう。$|\boldsymbol{p}>$ は，波動関数

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})=<\boldsymbol{r}|\boldsymbol{p}>=N_1\exp\Big(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{pr}\Big)$$

に対応する，一定の運動量の状態である。それから，われわれは位置のモニターのいろいろな誤差 $\varDelta a$ に対応する分布を比較することができる。とくにわれわれは精度 $\varDelta a$ でモニターしている時の運動量の分布を，モニターをしないとき，すなわち $\varDelta a=\infty$ の場合と比べることができる。

ガウス積分は (第 3 章の 3.4 節の式により) 容易に

$$<\boldsymbol{p}|\rho_T|\boldsymbol{p}>=\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 W_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)\rho_0(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2) \tag{4.28}$$

を与える。ここで

$$W_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)=N_2\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)-\frac{2}{\varDelta a^2}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2\Big)$$

である。

粒子の初めの状態を

$$\psi_0(\boldsymbol{r})=N_3\exp\Big(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{r}-\frac{1}{2\ell^2}\boldsymbol{r}^2\Big)$$

としよう。この状態は位置の不確定 $\varDelta q_0=\ell/\sqrt{2}$ をもって原点にあり，不確定さ (各成分の)

$$\Delta p_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\ell}$$

をもって運動量 $\boldsymbol{p}_0$ を持つ。この状態の密度行列は

$$\rho_0(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2) = |N_3|^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}_0(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - \frac{1}{2\ell^2}(\boldsymbol{r}_1{}^2 + \boldsymbol{r}_2{}^2)\right)$$

である。

この密度行列を (4.28) 式に代入してガウス積分を行うと

$$<\boldsymbol{p}|\rho_T|\boldsymbol{p}> = N_4 \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0)^2}{2\left(\frac{\hbar^2}{\ell^2} + \frac{4\hbar^2}{\Delta a^2}\right)}\right)$$

を得る。したがって，時刻Tにおける（すなわち，連続測定の後の）運動量の2乗偏差は

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_0{}^2 + \frac{2\hbar^2}{\Delta a^2}} \tag{4.29}$$

である。

* 4.2節の終りに述べたことによって，有効測定誤差は，$\varkappa$ を定数として，$\Delta a^2 = \varkappa / T$ によってTによることに注意しよう。したがって2乗偏差 Δp は時間とともに増大する。パラメーター $\varkappa$ は，連続測定を構成する“要素的な”測定の時刻と距離の不確定によって $\tau\lambda^2$ の形に表わせる。だから前の式は

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_0{}^2 + 2\frac{T}{\tau}\left(\frac{\hbar}{\lambda}\right)^2}$$

と書き直せる。十分に大きな時間，

$$\frac{T}{\tau} \gg \left(\frac{\lambda \Delta p_0}{\hbar}\right)^2,$$

に対しては，運動量の有効2乗偏差は

$$\Delta p = \sqrt{2\frac{T}{\tau}}\frac{\hbar}{\lambda}$$

である。**

測定されずに伝播する粒子の対応する式は $\Delta a = \infty$ とすることによって得

---

* ここから** までの文節は，日本語版のために，著者が追加したものである（訳者）。

られる（無限大の誤差を持つ測定はまったく測定しないことを意味する）。自由粒子の運動量が，運動量の保存によって，時間がたっても変らないのは当然である。位置のモニターの影響は運動量の 2 乗偏差を (4.29) 式に従って広げることである。

われわれは，連続測定の影響をともなう発展の後に，時刻 T に生じる状態 ρ_T の一つの特性を見出しただけである。この状態は (4.27) 式によって明白な形で見出されうる。しかしこの状態の一つの特徴 (4.29) でさえ，測定が粒子の発展に影響を与えることを示している。粒子は**連続測定の結果として散乱される**と言うことができる。

ここで考える場合には測定の影響は運動量分布を広げることである。この拡大は不確定性原理の観点から容易に理解できる。連続測定の結果として粒子の位置は誤差 Δa で知られる。この誤差が最初の位置の不確定よりずっと小さい，$\Delta a \ll \Delta q_0$，ならば，不確定性原理によって運動量の不確定は，$\Delta p_0 = \hbar/2\Delta q_0$ でなく，$\Delta p \simeq \sqrt{2}\hbar/\Delta a$ となる。

測定（特に位置のモニター）を論じるとき，われわれは必ずしもそのために準備された測定を意味しない。重要なのは，われわれの系についての情報がある形で系の外に残されることだけである。その媒質中の粒子の伝播が各瞬間ごとにある精度でその状態（例えばその位置）についての情報を残すような，そういう性質を持つ特定の媒質の中を粒子は伝播する。はっきりした例は泡箱あるいはウイルソン霧箱の写真である。けれども，どんな媒質も，実際，測定する媒質と考えることができる。問題は，この測定が与える情報はどんなタイプのものか，そして測定の精度はどのくらいかということだけである。

注意　4　位置のモニターを記述するガウス型の帯 (4.9)，(4.26) は時間間隔 T を固定したときにだけ使える。状態の時間について連続的な発展を考えるには（すなわち，この状態を異なる時刻において比較するには），瞬間測定の特性を矩形で近似するほうが（第 2 章の 2.3.3 節を見よ）適して

いる。このことは後で，連続測定の群論的性質を考えるときに論じる（第10章の10.3節）。

5. 振動子の連続測定

前の章では量子連続測定を径路積分をもとにして考えるための一般的方法を定式化した。ここではこの方法をもっとも簡単な(しかし非常に重要な)量子系，すなわち振動子，に適用する。

現実の多くの系は調和振動子，あるいはその集まり，として近似的に扱うことができる。これが，この章の結果が，実際，広い範囲に適用できる理由である。われわれはそれを実用的に興味のある系，すなわちウェーバー型の重力波アンテナ，に適用する。

5.5 節では有効ラグランジァン(ハミルトニアン)の方法を，数値計算と結びつけて，非線形振動子に適用する。これは，この領域におけるコンピューターによる計算法が研究できる系の領域をいかに広げるかを示す。* 非線形量子系における連続測定についてのもう一つの論文，Mensky, Onofrio and Presilla (1993), が本書の初版(英語版)が印刷されてから発表された。その論文では，非線形振動子におけるストロボスコピックな(断続的に行う)QND 測定の現実的なモデルが，制限された径路積分によって解析されている。

この章の(実際はこの本の全部の)すべての見積りは大きさの程度までである。このことは計算を簡単にするばかりでなく，多くの実際的な目的にはそれで十分なのである。計算はすべて，数学的な簡単さのために，ガウス型汎関数に対して行われる。この選び方の正しさは第 4 章の 4.2 節で論じた(この問題の違う観点からの議論が第 10 章にもある)。

---

* ここからこの文節の最後までは，著者による日本語版への追加である(訳者)。

5.1 位置のモニター（径路の測定）

第 4 章で測定振幅 $U_\alpha(t'', q''|t', q')$ がデータ α を生じる連続測定を受けている系の伝播子として定義された。この振幅は，測定の具体的なタイプとその具体的なデータを特徴づける重み汎関数 w_α を用いた，重みをつけた（制限された）径路積分の形で表わすことができる。位置のモニターが，連続測定の例として，考えられた。この場合測定データは径路 $\alpha=[a]$ によって特徴づけられ（これが位置のモニターが径路の測定と呼ばれる理由である），重み汎関数はガウス型にとることができる：

$$w_{[a]}[q]=\exp\left(-\frac{2}{T\Delta a^2}\int_0^T(q(t)-a(t))^2\mathrm{d}t\right) \quad 。 \tag{5.1}$$

ここで Δa は位置のモニターの誤差であり，測定の間隔は $[0, T]$ とする。誤差 Δa は一定とする。測定誤差が時間による場合もまったく同様に扱える。

測定振幅

$$U_{[a]}(q', q)=\langle q'|U_{[a]}|q\rangle=\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\,w_a[q]\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{5.2}$$

を考える。これは駆動されている（すなわち，外力の影響下にある）調和振動子

$$S[q]=\int_0^T L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t, \quad L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}m\omega^2q^2+qF(t)$$

の位置のモニターに対するものである。したがってわれわれは，二種類の違う性質の外部からの影響の下にある調和振動子を考えることになる：(1) 外力の作用，(2)（この振動子の位置をモニターする）測定装置の反作用。第 1 の影響はラグランジァンの中の項 $qF(t)$ によって記述される。第 2 の影響は径路積分 (5.2) の被積分関数の中の重み汎関数 $w_{[a]}[q]$ によって取り入れられる。

この例の重要さは，平衡状態の近くにある任意の系が振動子あるいは振動子の集まりによって近似できることから分かる。そのような系の力学はくわしく調べられているが，その力学に対する連続測定の影響は新しくて重要な

問題である。

上の式では時間間隔を $[0,\ T]$ とし，連続測定の前と後の位置を，それぞれ，q と q' としてある。

連続測定のいろいろなデータの確率は第4章の式(4.19)と(4.20)によって与えられる。それらの式は終状態の密度行列を含み，これはまた始状態によっている。しかし，これらの状態への依存性が重要でない場合もある。それは，始状態と終状態の拡がりが小さくて，それぞれの状態が一つの点（それぞれ，q と q'）に局在するものと近似できる場合である。これが成り立つための条件は Mensky (1983 a) の本の中でくわしく調べられている。その条件は，例えば，時刻 $t=0,\ T$ における系の位置が十分に高い精度で測定される場合にみたされている。

それらの条件の詳細には立ち入らないで，ここでは点 $q,\ q'$ が知られているとしよう。すると測定データ $[a]$ に対する確率密度は

$$P_{[a]}(q',\ q)=|U_{[a]}(q',\ q)|^2 \tag{5.3}$$

である。

測定振幅 $U_{[a]}$ を評価するために，重み汎関数(5.1)から生じる有効作用が2次であることを使える[1]。結果は，制限された径路積分(5.2)は別の調和振動子に対する制限されない径路積分

$$U_{[a]}(q',\ q)=\exp\left(-\frac{2}{T\Delta a^2}\int_0^T a^2 \mathrm{d}t\right)\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tilde{S}[q]\right) \tag{5.4}$$

によって表わされ，有効作用は

$$\tilde{S}=\int_0^T \tilde{L}(q,\ \dot{q},\ t)\mathrm{d}t,\quad \tilde{L}=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}m\tilde{\omega}^2q^2+q\tilde{F}(t)$$

となることが示される。

有効作用と有効ラグランジァンは調和振動子のそれと一致することが分かる。この補助（架空）振動子のパラメーター $\tilde{\omega}$, $\tilde{F}(t)$ は容易に求められ，複素数であることが分かる。:

---

[1] 有効作用という概念は第4章の4.2節で定義されている。

$$\tilde{\omega}^2=\omega^2-\mathrm{i}\nu^2$$

$$\tilde{F}(t)=F(t)-\mathrm{i}m\nu^2 a(t) \quad 。$$

虚部はパラメーター

$$\nu^2=\frac{4\hbar}{mT\Delta a^2}$$

によってきまる。測定の誤差 Δa が小さいほど，有効ラグランジァンの虚部は大きい。これは，測定が精密であるほど，測定される系への影響が大きいからである。

駆動されている振動子に対する径路積分は古典作用（古典軌跡に対する作用汎関数）によって表わすことができる（第 3 章の 3.3 節を見よ）。それは測定振幅に対して次の式を与える：

$$U_{[a]}(q',\ q)=\left(\frac{m\tilde{\omega}}{2\pi\mathrm{i}\hbar\sin\tilde{\omega}T}\right)^{1/2}\exp\left(-2\frac{\langle a^2\rangle}{\Delta a^2}+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tilde{S}[\tilde{q}_{class}]\right) \quad 。 \tag{5.5}$$

ここで架空複素振動子の‘古典’軌跡

$$m\ddot{\tilde{q}}_{class}+m\tilde{\omega}^2\tilde{q}_{class}=\tilde{F},\quad \tilde{q}_{class}(0)=q,\quad \tilde{q}_{class}(T)=q'$$

と時間平均の記号

$$\langle f\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

を導入した。

われわれに関心があるのは測定確率 (5.3)，すなわち測定振幅の絶対値だけである。この振幅の数係数（規格化因子）も重要ではない。したがって計算に必要なのは (5.5) の指数の実部だけである。部分積分によって，この実数は

$$-2\frac{\langle|\tilde{q}_{class}-a|^2\rangle}{\Delta a^2}$$

に等しいことが示される。したがって，測定確率は

$$P_{[a]}(q',\ q)=J^2\exp\left(-\frac{4}{\Delta a^2}\langle|\zeta|^2\rangle\right) \tag{5.6}$$

であり，ここで記号

$$\zeta(t)=\tilde{q}_{class}(t)-a(t)$$

を導入した。

関数 $\zeta(t)$ は次の式と境界条件

$$m\ddot{\zeta}+m\tilde{\omega}^2\zeta=\delta F,\quad \zeta(0)=\delta q,\quad \zeta(T)=\delta q' \tag{5.7}$$

をみたすことが容易に分かる。ここで

$$\delta F=F-F_{[a]},\quad \delta q=q-a(0),\quad \delta q'=q'-a(T)$$

であり，記号

$$F_{[a]}=m\ddot{a}+m\omega^2 a$$

を導入した。

たくさんの新しい記号にうんざりするかも知れないが，最後の式(5.6)，(5.7)は簡単で自然な解釈ができる。(5.6)式は，補助関数 $\zeta(t)$ のノルム

$$\|\zeta\|=\langle|\zeta|^2\rangle^{1/2}$$

が測定の誤差，Δa，よりも大きくなるとデータ $[a]$ の確率が小さくなることを示している。(5.6)式から，一番起こりそうなのは $\zeta(t)\equiv 0$ に対するデータであることがわかる。それは $\delta F\equiv 0$ で $\delta q=\delta q'=0$ の場合にあたる。δF，δq および $\delta q'$ の定義から，もっとも可能性の高いデータ $[a_0]$ は

$$m\ddot{a}_0+m\omega^2 a_0=F,\quad a_0(0)=q,\quad a_0(T)=q'$$

をみたすので $[a_0]=[q_{class}]$ であることがわかる。これは，もちろん，予期されたことである。

得られた結果からの一つの直接の結論は，径路の測定データを知って，振動子に働く力を推定できる可能性である。径路の測定(位置のモニター)がデータ $[a]$ を与えるとき，力に対する最良の推定は $F_{[a]}$ である。これは，関数 $F_{[a]}(t)$ と $F(t)$ がもっとも高い確率で一致するからである。もう少し正確に言えば，$F_{[a]}$ と F との差が大きいほど，データ $[a]$ の確率は小さい。この結果の定量的な定式化を以下で与えよう。

前のパラグラフで述べたことは，測定のもっとも確率の高い結果は古典論の予言に対応するものであることを意味する。しかし，測定データの古典的描像からのズレがどのくらい大きくなりうるかを知るのは興味がある。もっとも確率の高いデータ $[a]=[q_{class}]$ だけでなく，極大値に近い確率を持つデ

ータをも考えれば，この問題に答えることができる[2]。

(5.6) 式によって，関数 $\zeta(t)$ のノルムが測定誤差 $\varDelta a$ より小さいか同じ程度

$$\|\zeta\| \lesssim \frac{1}{2}\varDelta a \tag{5.8}$$

ならば，測定データ $[a]$ は十分に起こりそうである (その確率が極大値に近い)。ノルム $\|\zeta\|$ は δq，$\delta q'$ と関数 δF の値が増すと大きくなる。これらの値が増すと測定から得られる描像が古典描像からずれることは明らかである。

測定データの古典論の予測からのずれを特徴づけるパラメーター δq，$\delta q'$，δF は，それぞれ，**位置のズレ**と**力のズレ**と呼ぶことができる。q，q' は連続測定を行う前と後の位置の測定データであることを思い出そう。位置のズレ δq，$\delta q'$ は，位置のモニター (径路の測定) の結果として得られる径路の始点と終点，$a(0)$ と $a(T)$，からの q，q' のズレを表わす。これらのズレが増すと，対応する測定結果 $[a]$ の確率は減少する。これは，連続測定の結果は連続測定の前と後の瞬間的な位置の測定と合っている場合が一番確率が高いことを意味する。

同じように関数 $\delta F(t)$(力のズレ) は力 $F_{[a]}$(測定データにもとづいて見出されるもの) の，測定の間に振動子に作用している実際の力からの，ズレを表わす。q，q'，および $F(t)$ による関数 $\zeta(t)$ を**偏差関数**と，そのノルム $\|\zeta\|$ を**偏差ノルム**と呼ぶことができる。それは測定データの分布を，(5.6) 式

$$P_{[a]}(q',\ q) = J^2 \exp\left(-\frac{4}{\varDelta a^2}\|\zeta\|^2\right) \tag{5.9}$$

によって，直接に特徴づける。

---

[2] 言うまでもなく，確率でなく確率密度というほうが正しい。われわれの考察は数学的に見れば完全に厳密ではないが，大きさの程度までの推定をするには十分であり，それがわれわれの目標である。

5.2　振動子に働く力の推定

5.1節で径路の測定(位置のモニター)のデータ[a]の確率がδq，$\delta q'$(位置のズレ)と関数$\delta F(t)$(力のズレ)によることを見た。これらすべてのパラメーターは，測定データから得られる描像の古典描像からのズレを特徴づける。ここで

$$\delta q=\delta q'=0 \tag{5.10}$$

として，データの確率の力のズレδFへの依存性を調べよう。これによって，測定結果にもとづいた力の推定の精密度が分かる。

実際の典型的な問題は次のように定式化される：位置のモニターのデータ[a]が与えられたとき，力の最良の推定$F_{[a]}$は，振動子に働いている本当の力からどのくらいズレていることが可能か？

この質問に答えるには，こうすればよい：本当の力をFとし，力のズレ$\delta F=F-F_{[a]}$を導き，偏差関数$\zeta(t)$を

$$m\ddot{\zeta}+m\tilde{\omega}^2\zeta=\delta F,\quad \zeta(0)=\zeta(T)=0 \tag{5.11}$$

から求め，確率密度$P_{[a]}$を(5.9)式によって決定する。

得られた$P_{[a]}$が極大に近ければ，本当の力が$F_{[a]}$である確率は大きい。もし$P_{[a]}$がずっと小さければ，力Fが$F_{[a]}$に等しいことはあり得ない(その確率は小さい)[3]。実際上は，測定データ[a]についての情報に照らして確率の高い力を推定するには，不等式(5.8)で十分である。

力の推定の精度についてもっとはっきりした概念を得るために，力のズレ$\delta F(t)$の形を固定する。例えば，この関数が調和関数だとする。するとゼロ境界条件(5.10)が調和関数の周期と位相をきめ，

$$\delta F(t)=\delta F_{\Omega}\sin\Omega t \tag{5.12}$$

で$\Omega=n\pi/T$(nは整数)となる。nを固定すれば関数δFの任意性はその振幅δF_{Ω}だけである。われわれの仕事は，不等式(5.8)がまだ成り立っている

[3] 力Fの確率を，測定結果[a]をもとにして，もっと厳密に推定するにはある種のベイズ過程が必要である(Helstrom 1976を見よ)。しかし，粗い推定をするにはここで述べた考察で十分である。

ので，測定結果が $[a]$ であるという情報から見て，$F=F_{[a]}+\delta F$ の確率が高いような，$|\delta F_\Omega|$ の極大値を推定することである。

右辺が (5.12) で与えられた式 (5.11) は簡単に解けて

$$\zeta(t)=\frac{\delta F_\Omega}{m(\tilde{\omega}^2-\Omega^2)}\sin\Omega t,\quad \|\zeta\|^2=\frac{\delta F_\Omega{}^2}{2m^2[(\Omega^2-\omega^2)^2+\nu^4]}$$

となる。偏差のノルムに対する上の式を (5.8) に代入すると δF_Ω に対する制限が得られる。この不等式によると δF_Ω の極大値は

$$\delta F_\Omega{}^2{}_{\max}=\frac{1}{2}m^2(\Omega^2-\omega^2)^2\left(\Delta a^2+\frac{\Delta a_\Omega{}^4}{\Delta a^2}\right) \tag{5.13}$$

であり，ここで

$$\Delta a_\Omega{}^2=\frac{4\hbar}{mT|\Omega^2-\omega^2|}$$

である。

われわれの最後の結論は，調和関数型の力のズレ (5.13) は

$$|\delta F_\Omega|\lesssim\delta F_{\Omega\max} \tag{5.14}$$

に対してだけ確率が高く，極大値は式 (5.13) で与えられることである。このことは (5.13) は，連続測定のデータにもとづいた，(与えられた振動数での) 力の推定の誤差であることを意味する。言うまでもなく，連続測定というのは与えられた型 (位置のモニター，すなわち，径路の測定) のものを念頭においている。

ここで不等式 (5.14) を証明したのは調和関数 $\delta F(t)$ が振動数 $\Omega=n\pi/T$ を持ち，また，特殊な位相を選んだ場合に対してであった。しかし，共鳴振動数 ω からの差が π/T の程度より小さい振動数を除けば，同じ不等式が任意の振動数と位相に対して成り立つことが証明できる。したがって，もし

$$|\Omega-\omega|\gtrsim\frac{\pi}{T}$$

であり

$$\delta F(t)=\delta F_\Omega\sin(\Omega t+\Phi) \tag{5.15}$$

であるとすると，不等式 (5.14) がかなりの確率を持つすべての測定データに

対して成り立つ。

上に得られた結果をもう一度まとめておく。

もし (誤差 Δa で行われた) 振動子の径路測定がデータ $[a]$ を与えるとすれば，振動子に働く力の最良の推定は

$$\delta F_{[a]}(t)=m\ddot{a}+m\omega^2 a$$

である。しかし，本当の力 $F(t)$ はこの推定と違っているかも知れない。(共鳴振動数 ω から π/T 以上違っている) 振動数 Ω でのこの推定の誤差は $\delta F_{\Omega\max}$ 以上ではあり得ない。本当の力Fの推定された力 $F_{[a]}$ からのズレ $\delta F(t)$ が (5.15) の形であるならば，その振幅 δF_Ω は不等式 (5.14) をみたすことを，このことは意味する。振動数が共鳴振動数に近い場合には，位置のズレ δq，$\delta q'$ がゼロでない場合を含めて，もっと精密な解析が必要である。それは後で行う (5.3 節)。

(5.13) 式は測定には (与えられた振動数 Ω について) 二つの異なる領域，$\Delta a\gg\Delta a_\Omega$ と $\Delta a\ll\Delta a_\Omega$，ともう一つの特殊な領域，すなわちそれらの境界，$\Delta a\simeq\Delta a_\Omega$，とがあることを示している。それらを別々に考察しよう。

測定が粗いとき，$\Delta a\gg\Delta a_\Omega$，(5.13) 式の第 2 項は無視できて

$$\delta F_{\Omega\max}\simeq\frac{1}{\sqrt{2}}m|\Omega^2-\omega^2|\Delta a \tag{5.16}$$

となる。この式は，測定の誤差の減少とともに力の推定の誤差が減少するという意味で自然である。さらに，誤差 (5.16) は古典論に対応することが容易に示せる。

実際，古典論では力 $F(t)$ と径路 $q(t)$ との間に (固定した境界条件のFでは) 1 対 1 の対応がある。径路の違いが $\Delta q(t)$ という形のとき，力の違いは

$$\Delta F(t)=m(\Delta\ddot{q}+\omega^2\Delta q)$$

に等しい。振動数 Ω の調和関数の形での違いは，径路の同じ振動数の調和関数の形での違いから生じ，対応する調和関数の振幅は

$$\varDelta F_{\Omega}=m|\Omega^2-\omega^2|\varDelta q_{\Omega}$$

のように結びついている。径路が誤差 $\varDelta a$ で測定されるならば $\varDelta q_{\Omega}$ は $\varDelta a$ の程度の値によって制限されており，したがって $\varDelta F_{\Omega}$ は (5.16) の程度の値によって制限される。

このように，誤差 $\varDelta a \gg \varDelta a_{\Omega}$ で行われる径路の測定は，振動数 Ω において，純粋に古典的な性格を持つ。これを**測定の古典領域**ということができる。

十分に精密な測定，$\varDelta a \ll \varDelta a_{\Omega}$，という反対の場合には (5.13) 式の右辺の第1項が無視できる。したがって

$$\delta F_{\Omega\max}\simeq\frac{2\sqrt{2}\hbar}{T\varDelta a} \tag{5.17}$$

である。このとき生じる**測定の量子領域**は，測定の精度が増すと力の推定の精度が下るという意味で逆説的である。

この場合の推定の誤差は量子効果 (量子遙動，あるいは**量子測定雑音**)，すなわち，測定される系への測定装置の避けられない反作用の結果である。量子力学の原理と完全に対応して，測定が精密になるほど，反作用は大きい。その上，(5.17) 式はハイゼンベルクの不確定性原理と直接に対応している。それは，積 $T\delta F_{\Omega}$ を (与えられた振動数に対する) ある有効運動量の不確定，$\varDelta p_{\Omega}$，と書くと分かる。すると，(5.17) 式から積 $\varDelta a\varDelta p_{\Omega}$ は $\hbar$ の程度である。

測定誤差 $\varDelta a$ の変化の全領域を考えよう。$\varDelta a$ が大きいと，測定の古典領域が生じる。$\varDelta a$ が減少すると (古典的直観と完全に対応して) 力の推定の誤差 δF_{Ω} が減少する。しかし，これは $\varDelta a$ が境い目の値 $\varDelta a_{\Omega}$ に近づくまでである。この境い目を横切ると量子領域に入る。$\varDelta a$ がさらに減ると，逆説的に，力の推定の誤差 δF_{Ω} が大きくなる。これは量子遙動，すなわち量子測定雑音，の結果である。

古典領域と量子領域との中間，$\varDelta a \simeq \varDelta a_{\Omega}$，では力の推定の誤差が最小になる。この最適領域は (5.13) 式の第1 (古典) 項と第2 (量子) 項が等しくなるときに生じる。そのときの力の推定の誤差の最適 (最小) 値は

$$\delta F_{\Omega}{}^{\mathrm{opt}} \simeq m\,|\Omega^2-\omega^2|\,\Delta a_{\Omega}=2\sqrt{\frac{m\hbar\,|\Omega^2-\omega^2|}{T}} \tag{5.18}$$

である。この式は振動数 Ω が共鳴振動数 ω から遠い (差が π/T の程度より大きい) ときに成り立つ。共鳴測定の場合は 5.3.3 節で考える。

5.3　振動子のスペクトル測定

ここまでの節で考えた測定のモデルは一つの点で現実的でない：すべての振動数での有効なモニターは不可能である。そこで，制限された振動数の間隔内で行われる測定を考える必要がある。重要な測定のしかたとして，系の径路の一定の振動数成分の測定がある。例えば振動子の測定は，しばしば，共鳴振動数の近くの狭い振動数領域で行われる。この節では，測定される系を調和振動子として，そのような型の測定を考察する。

5.3.1　問題の定式化

振動子の径路を表わす関数 $q(t)$ を時間 $[0, T]$ においてフーリェ級数に展開する：

$$q(t)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \Omega_n t \quad 。 \tag{5.19}$$

ここで

$$\Omega_n=\frac{n\pi}{T}$$

であり，誤差 Δa_n での成分 q_n の測定を連続測定と考える。この型の測定をスペクトル測定と呼ぶことにする。

ここで考える方法の長所は測定の具体的なモデルを必要としないことだが，考えるような測定が実行される物理的条件についてあるていどのイメージを持つ方がよい。それについて，誤差 Δa で位置の測定を行うとき (現実のどんな装置もそうであるように) 限られた領域の振動数においてだけ反作用する

ようなどんな測定装置も，実際は，スペクトル測定をしていることを注意しておこう。

$I=[\Omega_1,\ \Omega_2]$ が装置が有効に働く振動数の領域であるとすると，振動数成分 q_n，$\Omega_n\in I$ に対してはこの測定は，誤差 $\Delta a_n=\Delta a$ でのスペクトル測定と考えることができ，それに対してこの領域の外の振動数成分，$q_{n'}$，$\Omega_{n'}\notin I$，は誤差 $\Delta a_{n'}=\infty$ で測定される。現実の装置によるモニターをもっと現実的に表わすには，Δa_n は領域 I の中程の振動数に対しては Δa に近く，その端に近づくほど大きくなり，この領域の外では非常に大きいとすればよい。

もっとも簡単なのは一つの振動数成分 q_n だけを誤差 Δa_n で測定する場合である。この測定は

$$w_{a_n,\Delta a_n}[q]=\exp\left(-\frac{(q_n-a_n)^2}{\Delta a_n{}^2}\right) \tag{5.20}$$

の形の重み汎関数で記述される。一般の場合には振動数成分 q_n, $n=1,2,\cdots\cdots$ が対応する誤差 Δa_n をもって測定される。その測定は汎関数

$$w_{a_1a_2\cdots}[q]=\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(q_n-a_n)^2}{\Delta a_n{}^2}\right)=\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q_n-a_n)^2}{\Delta a_n{}^2}\right) \tag{5.21}$$

によって記述される。振動数成分 q_n は関数 $q(t)$ の積分

$$q_n=\frac{2}{T}\int_0^T q(t)\sin\Omega_n t\,\mathrm{d}t \tag{5.22}$$

によって表わされる。これは汎関数 $w_{a_1a_2\cdots}[q]$ の関数 $q(t)$ による具体的な表現を与える。

級数から積分へ移るには**パーシヴァルの公式**

$$(f,\ g)=\frac{1}{T}\int_0^T f^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}^*g_n \tag{5.23}$$

が時々役に立つ。すべての振動数成分の測定誤差が同じで $\Delta a_1=\Delta a_2=\cdots=\Delta a_n$ ならば，((5.23) によって) 関数 (5.21) は汎関数 (5.1) と一致することが示せる。したがって位置のモニターはスペクトル測定の特殊な場合である。これが，この節で導いたことによって (5.2) 節の結果がさらに精密にされる理由である。

5.3.2 評価の結果

重み汎関数 (5.20), (5.21) を持つ径路積分

$$U_{a_n,\Delta a_n}(q',\ q)=\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\,w_{a_n,\Delta a_n}[q]\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{5.24}$$

$$U_{a_1,a_2,\cdots}(q',\ q)=\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\,w_{a_1,a_2,\cdots}[q]\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S[q]} \tag{5.25}$$

は径路積分のスペクトル表現 (Feynman and Hibbs 1965, 第 3 章の 3.3 節をも見よ) を使って評価することができる。このとき測度 $\mathrm{d}[q]$ は

$$\mathrm{d}[q]=\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{d}q_n$$

の形に表わされるので，径路積分は振動数成分についての無限次元積分に帰着する。

汎関数 (5.20), (5.21) を使う計算に現われる積分はすべてガウス型であって厳密に評価できる。得られた振幅 $U_{a_1a_2\cdots}$ によって確率密度

$$P_{a_n,\Delta a_n}=|\,U_{a_n,\Delta a_n}|^2$$

$$P_{a_1a_2\cdots}=|\,U_{a_1a_2\cdots}|^2$$

が見出される。真正直だが面倒な計算によって，簡単な単一の振動数成分の測定の場合には

$$P_{a_n,\Delta a_n}=\exp\left(-2\frac{(a_n-a_n^{\mathrm{class}})^2}{\Delta a_n^{\ 2}+\dfrac{(\Delta a_n^{\mathrm{opt}})^4}{\Delta a_n^{\ 2}}}\right) \tag{5.26}$$

となり，一般の場合には

$$P_{a_1a_2\cdots}=\prod_{n=1}^{\infty}P_{a_n,\Delta a_n}=\exp\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n-a_n^{\mathrm{class}})^2}{\Delta a_n^{\ 2}+\dfrac{(\Delta a_n^{\mathrm{opt}})^4}{\Delta a_n^{\ 2}}}\right) \tag{5.27}$$

となる。これらの式において次の量

$$a_n^{\mathrm{class}}=(\Omega_n^{\ 2}-\omega_n^{\ 2})^{-1}\left(-\frac{F_n}{m}+\frac{2\Omega_n}{T}(q-(-1)^n q')\right)$$

が生じている。これは，実は，古典論が予言する測定結果 (もちろん，境界条件 q, q' と力 $F(t)$ の対応する振動数成分 F_n による) と一致する。さらに記号

$$(\Delta a_n{}^{\mathrm{opt}})^2 = \frac{4\hbar}{mT|\Omega_n{}^2 - \omega^2|}$$

が用いられている。

測定データに対する確率分布からどんな結論が導かれるかを考えよう。単一の振動数成分 q_n だけを測定する場合から始める。異なる測定データの確率は(5.26)式によって与えられる。もっとも確率が高いデータ a_n は $a_n{}^{\mathrm{class}}$ である。しかし，a_n は $a_n{}^{\mathrm{class}}$ から

$$\delta a_n = \sqrt{\Delta a_n{}^2 + \frac{(\Delta a_n{}^{\mathrm{opt}})^4}{\Delta a_n{}^2}} \tag{5.28}$$

のていど違い得る。

測定の古典領域，$\Delta a_n \gg \Delta a_n{}^{\mathrm{opt}}$，では

$$\delta a_n = \Delta a_n$$

であって，古典測定理論と同じである。量子領域，$\Delta a_n \ll \Delta a_n{}^{\mathrm{opt}}$，では

$$\delta a_n = \frac{(\Delta a_n{}^{\mathrm{opt}})^2}{\Delta a_n}$$

である。データの変動は測定が精密になるほど大きくなる。この逆説的な事情は測定器からの量子系への不可避的な反作用の結果である。最適領域は $\Delta a_n \simeq \Delta a_n{}^{\mathrm{opt}}$ に相当する。このとき

$$\delta a_n{}^{\mathrm{opt}} = \left(\frac{8\hbar}{mT|\Omega_n{}^2 - \omega^2|}\right)^{1/2} \tag{5.29}$$

である。

5.3.3 働く力の推定

座標の振動数成分 q_n の測定によって，測定の間に振動子に働いている力 $F(t)$ の振動数成分 F_n が推定できる。分布(5.26)が $a_n = a_n{}^{class}$ のときにこの分布が最大になることを考慮すれば，推定される力 $F_n{}^{est}$ はその分布から導ける。データ a_n を得たならば，実験家は外力を式

$$F_n{}^{\mathrm{est}} = m(\omega^2 - \Omega_n{}^2)\,a_n + \frac{2m\Omega_n}{T}(q - (-1)^n q') \tag{5.30}$$

によって推定する。しかし，分布(5.26)によれば，a_n は a_n^{class} から量(5.28)の程度違う可能性がある。したがって，力の推定の誤差は一般の場合には

$$\delta F_n = m\,|\,\Omega_n{}^2 - \omega^2\,|\,\delta a_n \tag{5.31}$$

であり，最適領域では

$$\delta F_n{}^{\mathrm{opt}} = \left(\frac{8\hbar m\,|\,\Omega_n{}^2 - \omega^2\,|}{T}\right)^{1/2} \tag{5.32}$$

である。

共鳴測定，$\Omega_n \longrightarrow \omega$，の場合には，境界条件 q，q' は，その誤差 Δq に量子測定雑音が本質的によるので，正確に知られていると考えることはできない。(5.30)の第2項の不確定さを考慮すると，(5.32)の代わりに，次の式を得る：

$$\delta F_n{}^{\mathrm{opt}} = \left(\frac{8\hbar m\,|\,\Omega_n{}^2 - \omega^2\,|}{T}\right)^{1/2} + \frac{4m\Omega_n}{T}\Delta q \quad 。 \tag{5.33}$$

測定の前後に振動子がコヒーレント状態にあるとすると

$$\Delta q = \Delta q_{\mathrm{coher}} = (\hbar/m\omega)^{1/2}$$

である。測定時間 T を $n\pi/\omega$ に近く選ぶと Ω_n は ω に近くなって式(5.33)の第1項は小さくなり第2項が主になる。そのときこの式は初状態がコヒーレントであるときの共鳴測定に対する制限

$$\delta F_{\mathrm{res}}{}^{\mathrm{opt}} = 4\,\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{T} \tag{5.34}$$

を与える。これがいわゆる**標準量子限界**である。

コヒーレントな(もっともふつうの)状態に特徴的な座標の自然な不確定さは，(5.32)式からは可能なように見える $\delta F_n{}^{opt}=0$ を許さないことが分かる。しかしこの制約は連続測定の前後の位置の非常に精密な測定によって克服することができる。

時刻 $t=0$，T における座標の不確定が Δq_{coher} より小さくなるように，その時刻の座標 q，q' を測る。すると(5.33)の第2項はいくらでも小さくできる。さらに，もし時間間隔 T が Ω_n と ω との差が小さいままであるように選べるならば，標準量子限界は克服できる。このとき Braginsky et al (1978) に

よって提案された**測定のストロボ領域**が得られる。

いくつかの振動数成分 q_n を同時に測る場合((5.25)で記述されるような)を考えよう。この場合，測定データによって力の対応する成分，F_n^{est}，を推定できる。それによって，(5.19)の型の式によって，力 $F^{est}(t)$ を時刻の関数として回復することが可能になる。次に，現実の力のその推定からの2乗平均偏差

$$\langle(F-F^{\mathrm{est}})^2\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T dt\,(F(t)-F^{\mathrm{est}}(t))^2$$

はパーシヴァルの公式(5.23)によって評価できる。考える振動数領域が(π/T に比べて)あまり広くないとき，2乗平均偏差は

$$\langle(F-F^{\mathrm{est}})^2\rangle=\frac{4\hbar m}{T}|\Omega^2-\omega^2| \tag{5.35}$$

を越えない。共鳴振動数 ω のまわりで対称な振動数帯に対しては

$$\langle(F-F^{\mathrm{est}})^2\rangle=\frac{4\hbar m\omega\Delta\Omega}{T} \tag{5.36}$$

となる。

その式を，ウェーバー型のアンテナによって，重力波を検出する場合に適用しよう。ウェーバーの棒(あるいは，むしろ，その振動の一つのモード)は，この場合，調和振動子として表わせる。この振動子に働く有効力は

$$F=-mc^2R^1{}_{010}q$$

である。ここに現われる曲率テンソルの成分は計量 h の無次元の変化によって

$$c^2R^1{}_{010}=-\frac{1}{2}\ddot{h}$$

と表わせる。計量 h の2階微分は Ω^2h の程度である。

これは，大きさの程度では，ℓ をウェーバーの棒の長さとして

$$F\simeq\frac{1}{2}m\ell\Omega^2h$$

を与える。

計量の検出可能な変化の最小値として，式(5.35)は

$$\delta h^2 = \frac{16\hbar|\Omega^2-\omega^2|}{mT\ell^2\Omega^4} \tag{5.37}$$

を与える。広い振動数帯を測る必要がなければ，$\Delta\Omega$ を可能な最小値，π/T，にとることができる。すると $\Omega \simeq \omega$ であって

$$\delta h = \frac{4}{T\ell\omega}\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \tag{5,38}$$

である。$m=10^6\,g$，$\omega=10^4\,s^{-1}$，$\ell=10^2\,cm$，$\omega T \simeq 2\pi$ に対しては $\delta h \simeq 10^{-21}$ である。

ウェーバー型の重力波アンテナの座標を重力波の信号を推定するのに使うという条件の下で，この値はそのアンテナの感度の絶対的な制限を与える。この標準量子制限を克服する道はある。その一つは上述のストロボ測定である。もう一つは量子非破壊測定である (第 6 章を見よ)。

5.3.4 連結された振動子系

連結された調和振動子系は平衡に近い状態にある任意の振動系に対する普遍的なモデルである。例えば，ウェーバーの棒はふつう電気的な LC 回路につなげられており，その測定が棒の振舞いについての，したがって重力波についての間接的な情報を与える。二つあるいはそれ以上の連結された振動子は，すべて，量子的性質を現わすかも知れない。したがって，連結された量子振動子の系における測定という問題が自然に生じる。ここでは 2 個の振動子の系 (Mensky 1983a) を考え，その一つは外力に作用され，もう一つは連続測定を受けているとしよう (図 5.1)。

測定振幅は，この場合，二つの振動子の座標についての径路積分の形で表

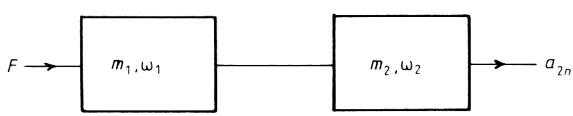


図 5.1：相互作用している二つの振動子。力 F が 1 番目の振動子に働く；2 番目の振動子の径路の n 番目の振動数成分を測定する。

わされる：

$$U_{a_{2n},\Delta a_{2n}}(q',\ q)=\int_{q_1}^{q_1'}\mathrm{d}[q_1]\int_{q_2}^{q_2'}\mathrm{d}[q_2]\,w_{a_{2n},\Delta a_{2n}}[q_2]\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S[q_1,q_2]}\quad。$$

ここで，2番目の振動子の座標だけが測定されるとしている。対応するラグランジァンは

$$L=\frac{1}{2}m_1(\dot{q}_1^{\,2}-\omega_1^{\,2}q_1^{\,2})+\frac{1}{2}m_2(\dot{q}_2^{\,2}-\omega_2^{\,2}q_2^{\,2})-gq_1q_2+Fq_1 \tag{5.39}$$

である。第2の振動子の座標の n 番目の振動数成分の測定を記述する重み因子は

$$w_{a_{2n},\Delta a_{2n}}[q]=\exp\left(-\frac{(q_{2n}-a_{2n})^2}{\Delta a_{2n}^{\ 2}}\right)$$

の形を持つ。

径路積分は振動子1個の場合とまったく同様に評価できる。その計算の結果は

$$P_{a_{2n},\Delta a_{2n}}=\exp\left(-2\frac{(a_{2n}-a_{2n}^{\ \mathrm{class}})^2}{\delta a_{2n}^{\ 2}}\right) \tag{5.40}$$

であり，ここで

$$\delta a_{2n}^{\ 2}=\Delta a_{2n}^{\ 2}+\frac{(\Delta a_{2n}^{\ \mathrm{opt}})^4}{\Delta a_{2n}^{\ 2}}$$

$$(\Delta a_{2n}^{\ \mathrm{opt}})^2=\frac{4\hbar m_1|\Omega_n^{\ 2}-\omega_1^{\ 2}|}{T|m_1m_2(\Omega_n^{\ 2}-\omega_1^{\ 2})(\Omega_n^{\ 2}-\omega_2^{\ 2})-g^2|} \tag{5.41}$$

である。

上の量 $a_{2n}^{\ \mathrm{class}}$ はこの問題の古典解に対応する。得られた結果の解析は，明らかに，1個の振動子の場合に行ったのとまったく同様にできる。その解析をすると，振動子系に働く力の最良の推定は古典論の推定と一致し，その誤差は

$$\delta F_n^{\ \mathrm{opt}}=\frac{\hbar m_1}{T}\left|\frac{(\Omega_n^{\ 2}-\omega_1^{\ 2})(\Omega_n^{\ 2}-\nu_1^{\ 2})(\Omega_n^{\ 2}-\nu_2^{\ 2})}{(\omega_1^{\ 2}-\nu_1^{\ 2})(\omega_2^{\ 2}-\nu_2^{\ 2})}\right| \tag{5.42}$$

であり，ここで二つの振動子の系の共鳴振動数

$$\nu_{1,2}^{\ 2}=\frac{1}{2}(\omega_1^{\ 2}+\omega_2^{\ 2})\mp\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_2^{\ 2}-\omega_1^{\ 2})^2+\frac{g^2}{m_1m_2}}$$

が導入されている。

振動数 Ω_n が特性振動数 ω_1，ν_1，ν_2 の一つに近づくと，(5.42) 式は成り立たなくなる。それは q_1，q_2 に対する境界条件の不確定さを考慮しなければならなくなるからである。測定の前と後に系がコヒーレント状態にあるとすると，それらの特性振動数に対して

$$\delta F^{\mathrm{opt}}(\omega_1)=\frac{1}{T}\sqrt{2\pi\hbar m_1\omega_1}$$

$$\delta F^{\mathrm{opt}}(\nu_1)=\frac{1}{T}\sqrt{2\pi\hbar m_1\nu_1}\times\sqrt{\frac{{\nu_2}^2-{\nu_1}^2}{{\omega_2}^2-{\nu_1}^2}}$$

$$\delta F^{\mathrm{opt}}(\nu_2)=\frac{1}{T}\sqrt{2\pi\hbar m_1\nu_2}\times\sqrt{\frac{{\nu_2}^2-{\nu_1}^2}{{\omega_1}^2-{\nu_1}^2}}$$

が得られる。多くの振動子が相互作用している系もまったく同様に扱える。

5.4 スペクトルを測定されている調和振動子の発展

連続測定されている量子系の発展則は第 4 章の 4.3 および 4.4 節で定式化された。初めの時刻を $t=0$，終りの時刻を $t=T$ とすると，この法則は

$$\rho_T=\int \mathrm{d}\mu(\alpha)\,U_\alpha\rho_0 U_\alpha^\dagger \tag{5.43}$$

あるいは密度行列の座標表示では

$$\rho_T(q_1',\ q_2')=\int \mathrm{d}q_1\int \mathrm{d}q_2\,U(q_1',\ q_1|q_2',\ q_2)\,\rho_0(q_1,\ q_2) \tag{5.44}$$

である。ここで次の記号

$$U(q_1',\ q_1|q_2',\ q_2)=\int_{q_1}^{q_1'}\mathrm{d}[q_1]\int_{q_2}^{q_2'}\mathrm{d}[q_2]\,w([q_1],\ [q_2])$$

$$\times\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(S[q_1]-S[q_2])\right) \tag{5.45}$$

$$w([q_1],\ [q_2])=\int \mathrm{d}\mu(\alpha)\,w_\alpha[q_1]\,w_\alpha[q_2] \tag{5.46}$$

が導入されている。測度 $d\mu(\alpha)$ は一般化されたユニタリー条件

$$\int \mathrm{d}q_1' U(q_1',\ q_1 | q_2',\ q_2) = \delta(q_1 - q_2) \tag{5.47}$$

がみたされるように選ばねばならない。

5.3節で述べたスペクトル測定の特別な場合を考えよう。この場合測定データ α は数の組 $a_1, a_2, \cdots$(径路の振動数成分の値) で表わされる。測度 $d\mu(\alpha)$ は明らかに変数 $a_1,\ a_2,\ \cdots$ についての(ある重みを持った)積分に帰着する。この節の計算によって重みは1であることが分かる。したがって

$$\mathrm{d}\mu(\alpha) = \mathrm{d}\mu(a_1,\ a_2,\ \cdots) = \mathrm{d}a_1 \mathrm{d}a_2 \cdots \tag{5.48}$$

である。この選び方が正しいことはあとで証明する。こう選ぶと(5.46)は

$$w([q_1],\ [q_2]) = \int \mathrm{d}a_1 \int \mathrm{d}a_2 \cdots w_{a_1,a_2,\cdots}[q_1]\, w_{a_1,a_2,\cdots}[q_2] \tag{5.49}$$

となる。

スペクトル測定に対する重み汎関数は(5.21)

$$w_{a_1 a_2 \cdots}[q] = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q_n - a_n)^2}{\Delta a_n^{\,2}} \right) \tag{5.50}$$

である。この式を(5.49)の重み汎関数に代入しガウス積分を行うと

$$w([q_1],\ [q_2]) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q_{1n} - q_{2n})^2}{\Delta a_n^{\,2}} \right)$$

となる。ここからあと数係数を省略するが，それは計算の最後に，規格化条件によって，回復される。

(5.45)式の $[q_1]$ と $[q_2]$ についての積分を計算するには，古典軌跡からのズレ z_1 と z_2 とに変数を変換するのが便利である：

$$q_1 = z_1 + \eta_1,\quad \ddot{\eta}_1 + \omega^2 \eta_1 = 0,\quad \eta_1(0) = q_1,\quad \eta_1(T) = q_1',$$

$$q_2 = z_2 + \eta_2,\quad \ddot{\eta}_2 + \omega^2 \eta_2 = 0,\quad \eta_2(0) = q_2,\quad \eta_2(T) = q_2' \quad 。$$

すると(5.45)は

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} (S[\eta_1] - S[\eta_2]) \right) \int_0^0 \mathrm{d}[z_1] \int_0^0 \mathrm{d}[z_2]$$

$$\times \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} (S[z_1] - S[z_2]) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_{1n} + \eta_{1n} - z_{2n} - \eta_{2n})^2}{\Delta a_n^{\,2}} \right)$$

となる。径路 $[z_1]$, $[z_2]$ についての積分は時刻 $t=0,\ T$ においてゼロ境界条

件を持つ。そのような積分は径路積分のスペクトル表現(Feynmen and Hibbs 1965, 第3章の3.3節をも見よ)によって，すなわち，径路$[z_i]$についての積分から径路のスペクトル成分，z_{in}，$n=1, 2, \cdots$，についての積分に移ることによって評価できる。それによってわれわれはガウス型の積分に到達し，関数Uに対して

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(S[\eta_1]-S[\eta_2])-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\eta_{1n}-\eta_{2n})^2}{\Delta a_n^{\ 2}}\right)$$

を得る。古典軌跡の具体的な形を使うと，直ちに，関数Uに対する最終の式

$$U(q_1', q_1|q_2', q_2)$$
$$=N\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\Phi(q_1, q_1')-\Phi(q_2, q_2'))+\Lambda(q_1-q_2, q_1'-q_2')\right) \quad (5.51)$$

が得られる。ここで

$$\Phi(q, q')=\frac{m\omega\cos\omega T}{2\sin\omega T}(q^2+q'^2)-\frac{m\omega}{\sin\omega T}qq'+q'F_\omega+qG_\omega,$$

$$\Lambda(u, v)=-\varkappa(u^2+v^2)+2\sigma uv$$

$$F_\omega=\frac{1}{\sin\omega T}\int_0^T\mathrm{d}tf(t)\sin\omega T,\quad G_\omega=\frac{1}{\sin\omega T}\int_0^T\mathrm{d}tf(t)\sin\omega(T-t),$$

$$\varkappa=\frac{2}{T^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega_n^{\ 2}}{\Delta a_n^{\ 2}(\Omega_n^{\ 2}-\omega^2)^2},\quad \sigma=\frac{2}{T^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\Omega_n^{\ 2}}{\Delta a_n^{\ 2}(\Omega_n^{\ 2}-\omega^2)^2}$$

である。規格化条件

$$N=m\omega/2\pi\hbar\sin\omega T$$

は関数(5.51)が一般化されたユニタリー条件(5.47)をみたすことからきまる。測定結果の空間での測度$d\mu(\alpha)$の選び方が正しくないと，定数Nをどう選んでも，この条件はみたされないことに注意しよう。したがって，一般化されたユニタリー条件をみたすことができたことは，われわれの計算で採用した(5.48)の選択が正しかったことを意味する。

(5.51)式で定義される超伝播子をもつ式(5.44)はスペクトル測定の型の連続測定を受けている量子調和振動子を記述する。そのような発展の特徴的な様相は，系の純粋状態が発展の後には混合状態に変ることである。これは

量子コヒーレンスを失わせる測定の結果である。この現象の簡単な例は第4章の4.4節で考察した。そこでは，連続測定を受けている自由粒子を記述するのに，(5.44)式で $\omega=0$ とした特別の場合を適用した。また，スペクトル測定の一般的な場合でなく，$\Delta a_1=\Delta a_2=\cdots=\Delta a$ に対応する，特別な場合を考えた。そのような測定は，実際，位置のモニター，すなわち径路の測定，と同じであることを，われわれは5.3節で見た。

5.5 非線形振動子の径路の測定

前の節では調和振動子の連続測定を考えた。前に述べたように，多くの場合に現実の系を，実際に，調和振動子として扱うことができる。しかしまた，多くの場合にこの近似は不十分であり，現実の系の非線形性を考慮しなければならない。このことは，例えば，古典的な原型がカオス的性質を持つような量子系を研究するときに重要である[4]。ここでは非線形な系のもっとも簡単な例，非線形振動子，を調べよう[5]。

有効シュレーディンガー方程式の数値積分にもとづく方法を使い，それを非線形振動子の位置の連続モニター（径路の測定）に適用する。

系が時空の二点 $(q,\ 0)$ と $(q',\ T)$ の間を動くとすれば，発展 $U_{[a]}(T,\ q'|0,\ q)=U_{[a]}(q',\ q)$ の結果は測定データ $[a]=\{a(t)|0\leq t\leq T\}$ に依存する。これは二つのしかたで解釈できる。1番目は，測定の前と後の系の位置 q と q' が与えられたときの測定データ $[a]$ に対する確率振幅を表わすとすることである。2番目は測定データが与えられたとき，連続測定を受けている系の伝播子と解釈することである。測定データと矛盾しない径路の集合に径路積分を制限することは，測定データ $[a]$ により，$[a]$ と矛盾しない径路の集合

[4] 数値実験で見ると，カオスの力学における量子―古典対応は異常であるらしい (Casati et al 1979, Chirikov et al 1981)。しかし，この現象の研究は量子測定過程を必要とするかもしれない (Shepelyansky 1983)。Adachi et al (1989) は量子領域にあって瞬間測定をされているカオス系の例を研究した。

[5] ここで述べる結果はロベルト・オノフリオおよびカルロ・プレシラとの共同研究によって得られた。Mensky et al (1991) を見よ。

の外では小さくなる重み汎関数によって有効に行うことができる：

$$U_{[a]}(q',\ q)=\int \mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T L(q,\ \dot{q},\ t)\mathrm{d}t\right)w_{[a]}[q]\quad 。$$

例えば，もし座標 q が誤差 Δa でモニターされ測定結果が $[a]$ であるならば，重み汎関数 $w_{[a]}[q]$ は $[a]$ を中心とし幅 Δa を持つ帯の中の径路 $q(t)$ を選ぶ。簡単な選び方はガウス型の重み汎関数

$$w_{[a]}[q]=\exp\left(-\frac{2}{T\Delta a^2}\int_0^T(q(t)-a(t))^2\mathrm{d}t\right)$$

である。すると制限された径路積分は

$$U_{[a]}(q',q)=\int \mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t-\frac{2}{T\Delta a^2}\int_0^T(q-a)^2\mathrm{d}t\right)$$

である。

この径路積分が，測定による虚数項を含む有効ラグランジアン

$$L_{\mathrm{eff}}(q,\ \dot{q},\ t)=L(q,\ \dot{q},\ t)+\frac{2\mathrm{i}\hbar}{T\Delta a^2}(q-a(t))^2 \tag{5.52}$$

を持つ自由な（すなわち，測定されていない）系を記述すると考えることができることは重要である。虚数項は配位空間の中で $q(t)=a(t)$ から遠い所での系の密度を減少させる。最後に，元のラグランジァンが時間に依存しなくても，有効ラグランジアンは時間によることを注意しておこう。

ある物理系の測定データに対する確率分布を推定するために波動関数で包みこんだ

$$I_{[a]}=\langle\psi_1|U_{[a]}|\psi_0\rangle=\iint\psi_1^*(q')\,U_{[a]}(q',\ q)\,\psi_0(q)\mathrm{d}q\mathrm{d}q'$$

を考える。$U_{[a]}$ の1番目の解釈によれば，系が測定の前に状態 ψ_0 にあり時刻 T の後状態 ψ_1 にあるという条件の下で，$I_{[a]}$ は測定がデータ $[a]$ を与える確率振幅である。そのとき測定データに対する確率分布は

$$P_{[a]}=\frac{|I_{[a]}|^2}{\int \mathrm{d}[a]|I_{[a]}|^2}$$

である。$P_{[a]}$ は装置の誤差 Δa によることに注意しよう。

振幅 $I_{[a]}$ はスカラー積

$$I_{[a]}=\langle\phi_1|\Psi_{[a]}(T)\rangle$$

で表わすことができる。ここで

$$\Psi_{[a]}(q',\ T)=\int U_{[a]}(q',\ q)\,\phi_0(q)\,\mathrm{d}q$$

である。$U_{[a]}$ の2番目の解釈によれば波動関数 $\Psi_{[a]}(q,\ T)$ は状態 $\phi_0(q)$ の，データ $[a]$ の連続測定の下での，時刻 T における発展を表わす。任意の時刻 t における状態 $\Psi_{[a]}(q,\ t)$ は時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_{[a]}(q,\ t)}{\partial t}=H_{\mathrm{eff}}\Psi_{[a]}(q,\ t) \tag{5.53}$$

の解として見出される。有効ハミルトニアン H_{eff} は (5.52) におけるラグランジアン L_{eff} に対応するものであり，初期条件は $\Psi_{[a]}(q,\ 0)=\phi_0(q)$ である。

有効ハミルトニアン H_{eff} の時間依存性のために解析的な計算は難しい。この場合には $P_{[a]}$ を評価するにはファインマン伝播子 $U_{[a]}$ を使うほうが簡単である。いずれにしても，L_{eff} への測定の寄与が2次であるために，解析的な計算は本質的に $L(q,\ \dot{q},\ t)$ が線形振動子である場合に限られる。一般には数値的方法を使わねばならず，そのときはシュレーディンガー形式のほうが使いやすい。連続な時空をシミュレートする適当な格子を選べば，偏微分方程式 (5.53) は簡単な回帰差分方程式に帰着する (Press et al 1986)。微分作用素 H_{eff} が時間に依存することとエルミート的でないことからは何も問題は生じない (Presilla 1990, Presilla et al 1991)。

非線形な系の振舞いを理解するために，まず，線形振動子

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{m\omega^2}{2}q^2$$

を考えよう。この場合，解析的な結果が得られているので，数値的方法のテストができる。有効ラグランジアン

$$L_{\mathrm{eff}}=\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{m\tilde{\omega}^2}{2}q^2-\frac{4\mathrm{i}\hbar}{T\Delta a^2}a(t)\,q+\frac{2\mathrm{i}\hbar}{T\Delta a^2}a(t)^2$$

は外力を受けている線形振動子に対応し，それは繰り込まれた複素振動数

$$\tilde{\omega}^2=\omega^2-\frac{4\mathrm{i}\hbar}{mT\varDelta a^2}$$

を持つ。測定データ $[a]$ をどのように選んでも，伝播核 $U_{[a]}$ は容易に計算できる (Feynman and Hibbs 1965，本書の第 3 章も見よ)。連続測定の時間 T の前と後に，量子系は測定されない振動子の基底状態

$$\psi_0(q)=\psi_1(q)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right) \tag{5.54}$$

にあるときに何が起こるかを考えよう。ψ_0 と ψ_1 の形により，測定データ $[a]$ に対してはゼロ境界条件 $a(0)=a(T)=0$ を選ぶのが自然である。そのような関数はフーリエ・サイン級数で表わせる。われわれは，n を整数として，

$$a(t)=a_0\sin\varOmega t,\quad \varOmega=\frac{n\pi}{T} \tag{5.55}$$

の形の測定データだけ考える。$\varOmega$ を固定すると，確率分布 $P_{[a]}$ は振幅 a_0 の関数に帰着する。$P(a_0)$ は幅 $\varDelta a_{\mathrm{eff}}$ のガウス関数

$$P(a_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi\varDelta a_{\mathrm{eff}}}}\exp\left(-\frac{2a_0{}^2}{\varDelta a_{\mathrm{eff}}{}^2}\right)$$

で，

$$\varDelta a_{\mathrm{eff}}{}^{-2}=2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\varDelta a^2}\left(1-\frac{4\mathrm{i}\hbar}{mT\varDelta a^2(\varOmega^2-\tilde{\omega}^2)}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{16\hbar\varOmega^2}{m\omega T^2\varDelta a^4(\varOmega^2-\tilde{\omega}^2)^2}\left[1-\mathrm{i}\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\left(\cot(\tilde{\omega}T)+\frac{(-1)^n}{\sin(\tilde{\omega}T)}\right)\right]^{-1}\right\}$$

である。

$\varDelta a_{\mathrm{eff}}$ の意味は測定される系の発展の間の測定装置の役割に結びついている。装置の誤差 $\varDelta a$ が測定されている系の特徴的な量子スケール，この場合 $\sqrt{\hbar/m\omega}$，に比べて大きい場合，径路 $[a]$ のまわりの幅 $2\varDelta a$ の帯は (ゼロ境界条件とともに) 古典軌跡を含んでいる。そして古典極限は

$$\varDelta a_{\mathrm{class}}=\lim_{\varDelta a\to\infty}\varDelta a_{\mathrm{eff}}=\varDelta a \tag{5.56}$$

である。他方，$\varDelta a$ が小さくなると量子雑音が生じる。古典軌跡からずっと離れた帯も生じやすくなる。量子極限は

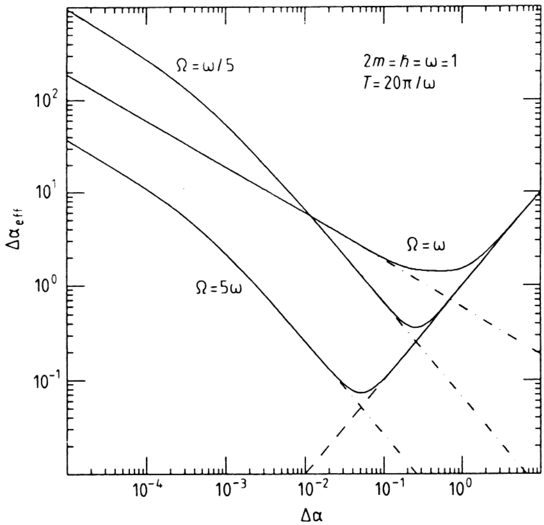


図 5.2：線形振動子の場合の比 Ω/ω の三つの値に対する有効不確定　対　装置の不確定。破線は古典極限 Δa_{class} であり，鎖線は量子極限 Δa_{quant} である。ほかのパラメーターの値も示してある。

$$\Delta a_{\mathrm{quant}}=\lim_{\Delta a\to 0}\Delta a_{\mathrm{eff}}$$
$$=\left[\sqrt{2}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{3/2}T^{1/2}\Omega^2\Delta a+\left(\frac{mT}{2\hbar}\right)^2(\Omega^2-\omega^2)^2\Delta a^2\right]^{-1/2} \tag{5.57}$$

と書ける。中間的な状況では Δa_{eff} はこれらの二つの極限をつなぎ，いつでも装置の誤差より大きな値をもっている。図 5.2 には比 Ω/ω の三つの異なる値に対して，Δa_{eff} 対 Δa の振舞いが示されている。(5.56) と (5.57) が示すように，古典極限はすべての状況で同じだが，量子領域では異なる振舞いが現われる。有効不確定の最小値は共鳴条件 $\Omega=\omega$ のとき最大である。この場合いつでも $\Delta a_{\mathrm{eff}}\geq\sqrt{\hbar/m\omega}$ である。$\Omega\neq\omega$ のとき，量子極限と古典極限の交叉によって推定される有効不確定の最小値は $|\Omega^2-\omega^2|^{-1}$ に比例して減少する。

Δa_{eff} に対する解析的結果と数値的結果の比較が図 5.3 に，測定パラメーターの異なる二つの選び方に対して，示されている。(5.56) と (5.57) で表わさ

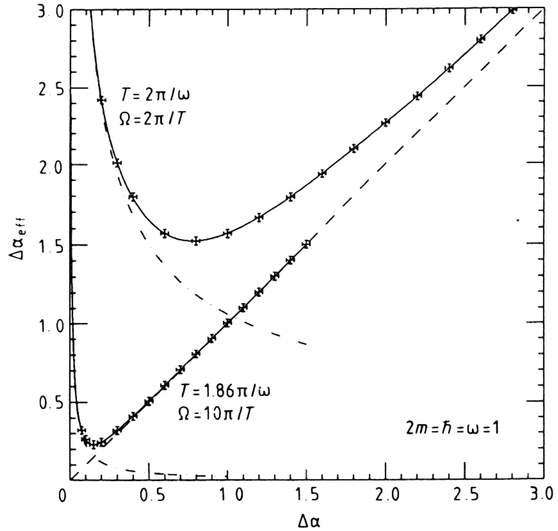


図 5.3：線形振動子に対する数値的（点）および解析的（実線）有効不確定対装置の不確定。漸近的な古典的（破線）および量子的（鎖線）振舞いも示してある。

れている極限に対応する古典的および量子的振舞いも示されている。数値的結果と解析的結果との違いは 0.1% 以下であり，それは，時空の格子の分解をもっと細かくすれば，もっと減らすことができる。

以上で推定した数値計算の精度によって，ラグランジァン

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{m\omega^2}{2}q^2-\frac{\beta}{4}q^4 \tag{5.58}$$

によって表わされる非線形振動子に対して意味のある計算をすることができることがわかる。先の線形の場合と比べるために，(5.54) の形の初状態と終状態および (5.55) の形の測定データを選ぶ。

この場合，$t=T$ における波動関数と伝播子の両方に対して非ガウス的な振舞いが期待される。これは分布 $P(a_0)$ もガウス関数でないことを意味する。$P(a_0)$ に対する有効幅を定義

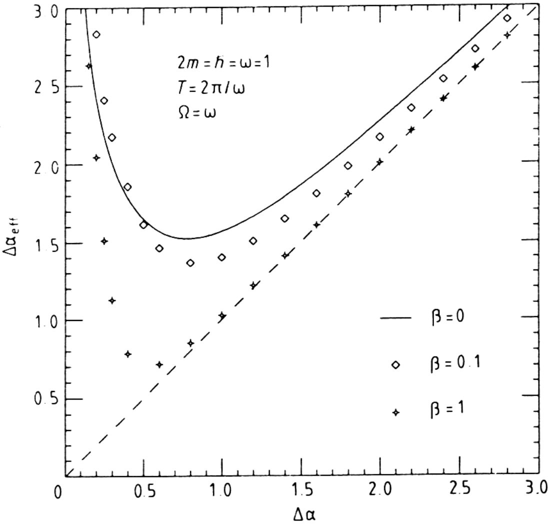


図 5.4：非線形振動子に対する，二つの異なる β の値での，数値的な有効不確定対　装置の不確定。実線は $\beta=0$ として得られる線形振動子の振舞いである。破線は古典極限を表わす。

$$\varDelta a_{\rm eff}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{P}(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}P(a_0)\,\mathrm{d}a_0 \tag{5.59}$$

によって導入する。非線形度係数 β の二つの異なる値に対して計算された $\varDelta a_{\rm eff}$ 対 $\varDelta a$ を図 5.4 に示してある。同じパラメーターの線形の場合との比較も示されてある。非線形項は古典近似が有効な領域を拡大する傾向があることが見てとれる。4 次の項は終りの波動関数を測定結果の近くに集中させ，それは，起こりやすい径路を拡げる，量子雑音の効果が減少することを意味する。

以上の考察では，すべて，$\varDelta a$ は時間に依存しないとした。$\varDelta a$ の時間依存性を考えることによって，もっと一般的な連続測定のクラスが得られる。特に，量子測定によってカオス的な力学を回復するには，測定の種類は特殊な条件をみたすもの，すなわち，モニターの下で量子非破壊のものでなくては

ならない (Adachi et al 1989)。量子非破壊のやり方は連続測定を径路積分によって扱う枠組みでも解析することができる (第 6 章を見よ)。

6. 量子非破壊連続測定

第4章と第5章では連続測定の典型的な例を考え，そのどれでも測定精度の最適レベルが存在することを知った。この最適レベルよりもっと精密な測定では，量子測定雑音のために，測定データから導ける情報は少くなる。したがって，与えられた型の測定から得られる情報にはある絶対量子制限がある。

しかし，このことが成り立たないような連続測定のクラスがある。それに対しては測定精度の最適レベルというものが存在しないので，精度は際限なく改良することができ，測定から得られる情報はふえつづける。そのような測定に対しては絶対量子制限は起こらず，これがその主な長所である。明らかに重要なこの種の測定は量子非破壊 (quantum nondemolition, QND) と呼ばれる。それは，測定の間の量子状態の収縮が状態についてわれわれが欲する情報を破壊しないからである。

この章ではこの型の実験を径路積分法の枠内で考える。われわれはもっとも簡単な自由粒子の運動量の測定の場合から始める。それによって，QND 測定に特徴的な典型的な状況がすべてわかる。そのあとで，もっと一般的なこの型の測定を考察する。

6.1 量子非破壊測定

前の章で考えた連続測定は，どれにも，対応するオブザーバブルの測定可能性についての絶対的な制限があった。その制限はいろいろなしかたで定式化できる。もっとも重要なものの一つは，与えられた型の測定を使っての力

の測定可能性についての制限である。われわれは，測定される系に働く力はある有限な精度の連続測定から推定できることを見た。力の推定の精度 δF は，もちろん，測定の誤差（装置の誤差）Δa に依存する。しかし，それはある特徴的な値 δF_{opt} より小さくすることはできない。Δa をある最適レベル Δa_{opt} に下げて $\delta F = \delta F_{opt}$ を得たとし，さらに Δa を小さくすると，δF はまた増大するので δF_{opt} のレベルを克服することはできない。このことからくる絶対的な制限は，ふつう，**標準量子制限**と呼ばれる（第 5 章の 5.3.3 節を見よ）。

上に描いた像は測定される系への測定装置からの不可避的な反作用の結果である。この反作用は量子論の特徴的な（そしてもっともエクサイティングな）性質である。それは，例えば**ハイゼンベルクの不確定性関係** $\Delta q \Delta p \gtrsim \hbar$ で表わされ，座標 q を精密に測定すると運動量 p の不確定を増加させることを意味する[1]。これが座標の連続モニターにおける絶対量子限界の根本的な理由である。実際，座標の測定は運動量を乱し，これはそれからの座標の力学に影響し，したがって，それ以後の座標の測定結果に影響する。このように，座標の非常に精密な測定（モニター）は系の発展を乱す。あまりに精密な実験が系について多くの情報を与えない理由はこれである。この場合の測定結果は，初期条件と発展法則によってでなく，測定の過程で生じる乱雑な量子搖動（量子測定雑音）によってある範囲に拡がる。

このことは精密な測定をしようとする人々にとっては，もちろん，好ましいことではなかった。Braginsky (1967) は標準量子限界を発見した。この困難が避けられないものかどうか，また，それを乗り越えて量子系について必要な情報を任意に誤差を小さくして取り出す方法があるかどうかを問題にしたのはブラギンスキー，ヴォロンツォフとハリリ (Braginsky et al 1977) が最初であった。その結果が**量子非破壊** (QND) **測定**の概念であって，その理論は Braginsky et al (1978)，Unruh (1979)，Caves et al (1980)，Caves (1983)

---

[1] いろいろな不確定性関係の現代的なそして数学的に厳密な議論は Martens and de Muynck (1990) にある。

および他の多数の人によって発展させられた。連続 QND 測定への径路積分の方法の応用は Golubtsova and Mensky (1989) によって行われた。

QND 測定のアイデアは，相補的な変数への不可避的な擾乱（じょうらん）が選んだ変数の発展を乱さないような変数を測定することである。座標 q を測定すると運動量 p は乱される。そして p は q の発展に影響する。これが，後の時刻における q の測定が前の時刻における q の測定によって予測不能な擾乱を受ける理由である。これは‘量子破壊’(QD) 測定である。ところが，自由粒子の運動量 p を測るときは事情はまったく違う。もちろんこれは，ハイゼンベルクの不確定性関係によって，座標 q を乱す。しかしこれは運動量 p の発展には影響しない。事実，p の発展は自由粒子に対しては平凡である：p は一定である（自由粒子の運動量に対しては保存則が成り立つ)。このように p の測定は，q を乱すけれども，後の時刻の運動量 p を乱さない。このように p の未来の測定はそれに先立つ測定によって乱されない（もちろん自由粒子に対してだけである)。これが QND 測定のもっとも簡単な例である。あとでこれをもっとくわしく考察する (6.2 節)

一般の場合には不確定性関係 $\Delta X \Delta Y \gtrsim \hbar$ にしたがう二つの相補的な変数 X，Y があり，その一つ，X，を測る。それは Y を乱す。しかし，X の発展が Y によらないように変数を選ぶ。したがって Y の乱れは X の未来の値に影響しない。その結果，X の測定はその未来の測定に影響しない。したがって X の測定は量子非破壊 (QND) である。このとき変数 X は**量子非破壊変数**と呼ばれる。われわれはあとで，調和振動子の直角位相成分を選んで，この型の例を考える (6.4 節，第 9 章の 9.6 節をも見よ)。

与えられた変数 A が QND 変数であるための有用な形式的な基準がその変数のハイゼンベルク表示を使って与えられる。任意の量子オブザーバブル（状態空間での作用素）A に対してそのハイゼンベルク表示は系のハミルトニアンと発展作用素によって，次のように定義される。（ハミルトニアンが時間をあらわに含まないときは）発展作用素は $U_t = \exp[(\mathrm{i}/\hbar) Ht]$ の形を持つ。A のハイゼンベルク表示 $A_H(t)$ は

$$A_H(t)=U_t{}^\dagger A U_t=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}Ae^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

である。任意の時刻 t', t'' に対して交換関係

$$[A_H(t'),\ A_H(t'')]=0 \tag{6.1}$$

がみたされれば A は QND 変数であることが証明できる[2]。

例えば自由粒子

$$H(p,\ q)=\frac{p^2}{2m} \tag{6.2}$$

を考えよう。$q_H(t')$, $q_H(t'')$ は $t'\neq t''$ に対して一般には非可換だから，座標 q が量子破壊であることはすぐに分かる。けれども運動量 p に対しては事情は違う。いまの場合 $p_H(t)=p$ は時間によらない（これは保存則の結果である)。したがって運動量のハイゼンベルク作用素，$p_H(t)$, は条件 (6.1) をみたす。自由粒子の運動量は QND 変数なのである。

調和振動子

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2} \tag{6.3}$$

を考えると，いわゆる直角位相成分

$$\begin{aligned} X&=q\cos\omega t-\frac{p}{m\omega}\sin\omega t \\ Y&=q\sin\omega t+\frac{p}{m\omega}\cos\omega t \end{aligned} \tag{6.4}$$

のどちらも QND 変数であることが証明できる。これは Thorne et al (1978) によって示された (Unruh 1979, Caves et al 1980, Braginsky et al 1980 をも見よ)。

QND 変数のモニターを径路積分の方法で考えよう。(1次元) 自由粒子の運動量というもっとも簡単な場合から始める。

[2] 離散的な時系列 $t_1, t_2, \cdots$ において行われる測定だけを問題にするときには，それらの測定の QND 性はこの系列のすべての時刻に対して $[A_H(t_i),\ A_H(t_j)]=0$ を要求することによって与えられる。

6.2 運動量のモニター

もっとも簡単な1次元系，自由粒子(6.2)，とその運動量，p，のモニターを考える(Mensky 1992c)。第4章で展開したやり方に従って，系の伝播子を径路積分の形で与え，次に対応する重み汎関数をこの径路積分の被積分関数に導入して，測定振幅をつくる。しかし，いまの場合，重み汎関数は運動量pによるはずである。したがって径路積分の座標表示は便利ではない。それに代えて，出発点として，径路積分の相空間(ハミルトニアン)形式を採用する(便宜上，時間間隔は$[0,\ T]$に固定する)：

$$U(q',\ q)=\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\int\mathrm{d}[p]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T(p\dot{q}-H(p,\ q))\,\mathrm{d}t\right)\quad 。$$

重み汎関数を導入すると測定振幅

$$U_\alpha(q',\ q)=\int_q^{q'}d[q]\int\mathrm{d}[p]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T(p\dot{q}-H(p,\ q))\,\mathrm{d}t\right)$$
$$w_\alpha[p,\ q] \tag{6.5}$$

が得られる。

(6.5)の形は座標と運動量についての情報を時間の関数として与えるような連続測定を記述するのに適している。運動量pのモニターに対しては，測定データはある関数$b(t)$によって表わせる。その意味するところは，時刻tにおける運動量pの値が$b(t)$に近いことである。これが間隔$[0,\ T]$の中のすべての時刻に対して成り立つならば，運動量空間における径路$[p]$は径路$[b]$に近いはずである。このことは，$[b]$に近い$[p]$に対しては1に近く，$[b]$から遠い$[p]$に対してはほとんどゼロであるような重み汎関数$w_{[b]}[p]$を導入しなければならないことを意味する。こうして得られる，運動量のモニターを記述する測定振幅は

$$U_{[b]}(q',\ q)=\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\int\mathrm{d}[p]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T(p\dot{q}-H(p,\ q))\,\mathrm{d}t\right)$$
$$w_{[b]}[p] \tag{6.6}$$

である。

汎関数の可能な (そして便利な) 形はガウス型

$$w_{[b]}[p]=\exp\left(-\frac{\langle(p-b)^2\rangle}{\Delta b^2}\right) \tag{6.7}$$

であって，Δb は運動量の測定の誤差であり，次の記号が使われている：

$$\langle f\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \quad 。$$

測定振幅 (6.6) は

$$U_{[b]}(q',\ q)=\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\int\mathrm{d}[p]\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T\mathrm{d}t\left(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}\right)-\frac{(p-b)^2}{T\Delta b^2}\right] \tag{6.8}$$

となる。

径路積分 (6.8) はガウス型だから厳密に計算できる。その結果は

$$U_{[b]}(q',\ q)=\exp\left(-\frac{\langle b^2\rangle}{\Delta b^2}+\frac{\left(\frac{\langle b\rangle}{\Delta b^2}+\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}(q'-q)\right)^2}{\frac{1}{\Delta b^2}+\mathrm{i}\frac{T}{2\hbar m}}\right) \tag{6.9}$$

である。絶対値の 2 乗をとると，確率分布として

$$P_{[b]}(q',\ q)=\exp\left(-2\frac{\langle(b-\langle b\rangle)^2\rangle}{\Delta b^2}-2\frac{\left(\langle b\rangle-\frac{m(q'-q)}{T}\right)^2}{\delta b^2}\right) \tag{6.10}$$

が得られる。ここで

$$\delta b=\sqrt{\Delta b^2+\frac{4\hbar^2m^2}{T^2\Delta b^2}} \tag{6.11}$$

である。

この式は明らかに次のように解釈できる。指数の中の第 1 項は数

$$\langle b\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T b(t)\,\mathrm{d}t$$

に等しい定数関数に関数 $b(t)$ が近いことを示す。関数 $b(t)$ の $\langle b\rangle$ からの平均 2 乗偏差は測定誤差 Δb より大きくはありえない。関数 $b(t)$ は測定データとして生じる帯の中心線をあらわす。したがってこの帯はほとんど水平であり，水平線から Δb 以上は離れない。

指数の中の第2項は量 $\langle b \rangle$ が $m(q'-q)/T$ に近いことを意味する。したがって，運動量の連続モニターは時刻 $t=0$, T における座標の測定と（誤差 δb の範囲で）合っている。

上述の分布 (6.10) の特徴は図6.1に示されている。測定された平均運動量

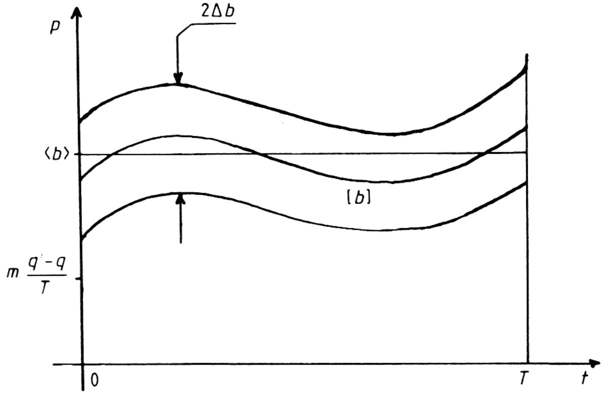


図 6.1：運動量のモニターが与える帯。これは精度 Δb で水平であり，精度 δb で境界条件 q，q' と合っている。

$\langle b \rangle$ と座標の測定から推定される運動量，$m(q'-q)/T$，との差は δb を越えない。高さ $\langle b \rangle$ の水平線は中心線が $[b]$ で幅が $2\Delta b$ の帯の中にあるはずである。したがって帯は精度 Δb で水平である。

帯が水平に近いことは測定される量 p が運動の恒量であることの反映である。帯の中心線の水平線からのズレが Δb を越えず，したがって，十分に精密な装置を選ぶことによっていくらでも小さくできることが運動量のQND性を表わしている。絶対量子限界は現われない——これはQND測定の特徴である。実際，運動量モニターの全体の像は本質的に古典的である（ただし，以下で論じるように，ある量子的性質が値 $\langle b \rangle$ に結びついている）。

もちろん，粒子に外力 $F(t)$ が働いていれば，運動量のモニターは水平でない帯を与える。帯の水平線からのズレが力を特徴づける。したがって，運動量のモニターは力の推定を可能にする。運動量のモニターが正確なほど，こ

の推定の精度は高い。

(6.11) 式をもっとくわしく考えよう。

古典領域，$\Delta b \gg \Delta b_{\mathrm{opt}}$,

$$\Delta b_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{2\hbar m}{T}},$$

では $\delta b = \Delta b$ であって，平均運動量 $\langle b \rangle$ と境界条件から推定される速度（掛ける質量），$m(q'-q)/T$，との差は

$$\left| \langle b \rangle - m\frac{q'-q}{T} \right| \simeq \Delta b$$

であって，これは古典論から予期されるものである。量子領域 ($\Delta b \ll \Delta b_{\mathrm{opt}}$) では式 (6.11) は

$$\delta b = \frac{2\hbar m}{T\Delta b}$$

となる。

$\Delta b = \Delta b_{\mathrm{opt}}$ と選んだとき δb は極小になり，それは

$$\delta b_{\mathrm{min}} = 2\sqrt{\frac{\hbar m}{T}} \tag{6.12}$$

である。Δb をほかのどの値にとっても $\langle b \rangle$ と $m(q'-q)/T$ との一致は悪くなるが，それは不等式

$$\Delta b \delta b \gtrsim \frac{2m\hbar}{T}$$

が成り立つからである。この不等式はハイゼンベルクの不確定性原理の形をしている。ここでは Δb は運動量のモニターの測定誤差であり，$\delta b/m$ は運動量のモニターの前と後の位置の瞬間測定のデータ q，q' から推定される速度の不確定である。したがって $(\delta b/m)T$ は速度と時間で表わした位置の不確定である。

われわれは前に運動量のモニターは（どの QND 測定とも同じく）純粋に古典的な性格を持つことを述べた。それではどうして絶対限界 (6.12) が生じるのだろうか？その理由は，運動量のモニターのほかに，実際には，モニタ

ーの前と後における位置の瞬間測定を考えており，この測定が量子破壊的であることである。このことを，量子破壊測定が行われないときの様子と比べてみよう。

モニターの前に系がきまった運動量 p_0 の状態

$$\psi_0(q)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0q}$$

にあるとして運動量のモニターを考えよう。確率振幅 (6.9) を使うと，モニターの後の状態は

$$\psi_T(\mathrm{q}')=\int U_{[b]}(q',\ q)\,\psi_0(q)\,\mathrm{d}q$$

$$=\exp\left(-\frac{\langle(b-\langle b\rangle)^2\rangle}{\Delta b^2}-\frac{(\langle b\rangle-p_0)^2}{\Delta b^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0q} \tag{6.13}$$

となる。終状態は同じ運動量 p_0 を持つことが分かる。

式 (6.13) には測定結果 $[b]$ による数因子を残してある。この因子は新しい状態のノルムが元の状態より小さいことを示している。これは，異なる測定データに対応する異なる発展のチャネルが可能だからである。この因子は測定データ $[b]$ に対する確率密度に他ならない：

$$P_{[b]}=\exp\left(-2\frac{\langle(b-\langle b\rangle)^2\rangle}{\Delta b^2}-2\frac{(\langle b\rangle-p_0)^2}{\Delta b^2}\right) \tag{6.14}$$

この分布は (6.10) に似ているが，測定された運動量の平均 $\langle b\rangle$ は初めの運動量 p_0 に近い。可能なズレは (モニターの前と後で座標を固定する場合の δb でなく) Δb であって，いくらでも小さくできる。

ちょっと見ると，上に導いた結果は運動量の測定についてのよく知られた不確定性関係 (Landau and Lifshits 1958)

$$\Delta p\Delta t\,|v''-v'|\simeq\hbar \tag{6.15}$$

に矛盾しているように思える。ここで Δp と Δt は測定の誤差と時間間隔であり，v'，v'' は測定の前と後の速度である。連続モニターは，それぞれが非常に短い時間間隔 $\Delta t=T/N$ の間に行われる，運動量のN個の測定の系列として表わすことができる。連続モニターはそのような測定系列の $N\to\infty$，したがって $\Delta t\to 0$, の極限として定義しなければならない。そのとき別々の測定

の誤差 Δp が有限なままであれば，$v''-v'$ (したがって $p''-p'$) は無限大になり，運動量の保存と測定の結果としての水平線は期待できない。

上の議論はすべて正しいのだが，一つの可能性が除外されている。それは $\Delta t\to 0$ とともに $\Delta p\to\infty$ の場合である。この場合は $p''-p'$ は有限なままでありうるだけでなく，0 になるかも知れない。$p''-p'\to 0$ の場合には，運動量の連続モニターをしている系に対しても，運動量の保存が成り立つ。先に現象論的径路積分法の枠内で述べたのはこの場合である。この測定で得られる関数 $b(t)$ が水平線に近いのはこのためである。

この議論から，運動量の保存が成り立つためには $\Delta p\to\infty$ が必要であることが分かる。したがってそのような測定では運動量の値はきめられない。そのような測定の結果は水平線でなくてはならないが，その線がどの高さにあるかはまったく知ることができない。平行な水平線の無限集合の中のどの線も測定の結果として生じうる。

式 (6.10) と上の分析はこの結論を支持する。結果の関数 $b(t)$ は必然的に定数に近く，Δb が小さいほどこの関数の定数からのズレが小さい。しかし，この関数の共通の高さ $\langle b\rangle$ はもっと低い精度 δb でしかきまらない。その上，この値は運動量のモニターによってきまるのではなく，境界条件 q，q' によって，すなわち，モニターの前と後の位置の瞬間測定によってきまる。モニター自体は運動量が保存されることを確認するだけである。それは，もちろん，保存される運動量に対してある値を与えるが，この値は，それが境界条件 (境界測定) と両立するものでありさえすれば，任意である。

2 番目に考えた場合，すなわちモニターの前の運動量 p_0 が知られている (あらかじめ測定されている) 場合，値 $\langle b\rangle$ は運動量保存の精度と同じ精度 Δb で固定される。これは運動量の測定の QND 性の結果である。この場合，モニターの前の運動量の測定は，もちろん，瞬間的ではない。その反対に，不確定性関係 (6.15) によって，非常に正確な値 p_0 を得るためには，この測定は無限に永くなければならない。

運動量のモニターがその保存を確認するだけでその値 $\langle b\rangle$ を与えないと

したら，それは一体意味があるだろうかという疑いが生じる。粒子に働く外力を推定するのにモニターが意味を持つことはすぐ分かる。われわれがくわしく調べたのは外力がゼロで運動量が保存される場合であった。ゼロでない力 $F(t)$ が働くと，それは保存則からのズレを生じる。そのとき運動量のモニターは定数からのズレが測定誤差 Δb よりも大きいようなある関数 $b(t)$ を与える。系に働く力は

$$\mathrm{F}_{\mathrm{est}}=\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.16}$$

によって推定される。この推定に重要なのは関数 $b(t)$ の定数からの違いであって，その時間平均 $\langle b\rangle$ ではない。

外力がゼロでない場合は径路積分の方法の枠内で容易に考えることができる。そのとき式 (6.16) は厳密に導ける。

6.3 速度 対 運動量

重み因子 (6.7) は運動量のモニターを記述し，それは自由粒子 (6.2) に対してはQND変数であることが分かる。これは測定結果の確率分布に対する式 (6.10) から分かる。(6.10) の指数の第1項は，測定から生じる帯は水平線に近く，その精度は帯の幅，Δb，であることを示している。帯の形の水平線からのズレによって，実験者は粒子に働く力を判断することができる。Δb はいくらでも小さくすることができる。このことは運動量 p と力 F との推定の誤差もいくらでも小さくできることを意味する。これはQND測定に特徴的な結論である。

さて重み因子を

$$w_{[c]}[p,\ q]=\exp\left(-\frac{\langle(\dot{q}-c)^2\rangle}{\Delta c^2}\right) \tag{6.17}$$

としよう。この汎関数が速度のモニターを記述し，結果として関数 $c(t)$ を与えるものであることは明らかである。径路積分 (6.5) を計算すると振幅は

$$U_{[c]}(q',\ q)=\exp\left[\frac{\langle c^2\rangle}{-\Delta c^2+\mathrm{i}\dfrac{2\hbar}{mT}}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\Delta c^2}+\mathrm{i}\frac{mT}{2\hbar}\right)\left(\frac{q'-q}{T}-\frac{\langle c\rangle}{1+\mathrm{i}\dfrac{mT\Delta c^2}{2\hbar}}\right)^2\right] \tag{6.18}$$

となり，確率密度は

$$P_{[c]}(q',\ q)=\exp\left(-2\frac{\langle(c-\langle c\rangle)^2\rangle}{\delta c}-2\frac{\left(\langle c\rangle-\dfrac{q'-q}{T}\right)^2}{\Delta c^2}\right) \tag{6.19}$$

となる。ここで

$$\delta c=\sqrt{\Delta c^2+\frac{4\hbar^2}{m^2T^2\Delta c^2}} \tag{6.20}$$

である。

事情は運動量の測定の場合と根本的に違う。それはこの型の測定には絶対量子限界があるからである。(6.19) の指数の第 1 項は，速度の帯は水平になるがその精度は高々 δc であることを示す。この量は Δc より大きく

$$\delta c_{\min}=2\sqrt{\frac{\hbar}{mT}} \tag{6.21}$$

より小さくはできない。これは速度の測定可能性に対する絶対限界であって，実際，標準量子限界 (SQL) と一致する。

(QND 変数としての) 運動量と速度 (量子破壊 (QD) 変数) との間にどうしてそんな根本的な違いがあるのだろうという疑問が生じるのはもっともである。多くの場合これらの変数の違いは因子mだけだから，この違いは奇妙だし逆説的にさえ見える。以上の考察は，量子力学では，運動量と速度との違いはそれだけではないことを示している。

一番目の説明は，p が $m\dot{q}$ に等しいのは古典運動方程式の帰結としてしか出ないのだが，径路積分 (6.5) は運動方程式をみたさないものも含めてすべての径路を含むことである。もう少し厳密にしよう。等式 $p=m\dot{q}$ は量子力学においても，量子オブザーバブル (作用素) の間の等式として，成り立つ。これは，ふつうの量子論のダイナミックスが支配しているときに成り立つ。

径路の言葉ではこのダイナミックスはすべての径路についての積分を含むふつうのファインマンの径路積分で表わされる。ところがわれわれが扱っているのは，測定装置の影響（とその結果である状態の収縮）の下で生じるある種の変更を受けたダイナミックスである。この変更されたダイナミックスは制限された径路積分で表わされる。そこで運動量と速度との間のふつうの関係が，変更されたダイナミックスでは，破れていることが分かる。物理的に言えば，これは測定の，測定装置の影響の，結果である。

後者の主張をもっとはっきりさせよう。そのために，簡単なモデルの枠内で，測定装置を具体的に考える。

考えている系と相互作用している副次的な系（ふつう探針あるいは‘計器’と呼ばれる）を考えよう。主系の間接的な測定のために，計器が測定されるとする。粒子の速度はラグランジァン

$$L_v(q,\ Q,\ \dot{q},\ \dot{Q})=\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2+Fq\right)-gm\dot{q}Q+L_M(Q,\ \dot{Q}) \qquad (6.22)$$

に従って粒子と相互作用する計器（座標Qをもつ1次元系）を使って測り得ることがCaves et al (1980) によって示された。ここでL_Mは計器のラグランジァンである。係数gは結合定数の役目をする。この係数を増すと測定は精密になる。

同様に（いくらでも精密な）運動量の測定に対しては次のハミルトニアンが必要である：

$$H_p(p,\ P,\ q,\ Q)=\left(\frac{1}{2m}p^2-Fq\right)+gpQ+H_M(P,\ Q) \qquad (6.23)$$

（運動量の測定をラグランジァンでなくハミルトニアンによって記述するのは自然である）。ここでも測定の精度は結合定数gによる。

ハミルトニアン (6.23) に対応するラグランジァンは式

$$H(p,\ P,\ q,\ Q)=p\dot{q}+P\dot{Q}-L(q,\ Q,\ \dot{q},\ \dot{Q})$$

によって容易に求められ

$$L_p=\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2+Fq\right)-gm\dot{q}Q+\left(L_M(Q,\ \dot{Q})+\frac{m}{2}g^2Q^2\right) \qquad (6.24)$$

となる。ここで L_M と H_M は

$$H_M(P,\ Q)=P\dot{Q}-L_M(Q,\ \dot{Q})$$

という関係によって結びついている。

したがって運動量 p の測定は相互作用ハミルトニアン $H_{int}=gpQ$ によって記述され，速度 $\dot{q}$ の測定は相互作用ラグランジアン $L_{int}=-gm\dot{q}Q$ によって記述される。二つのラグランジアン (6.22) と (6.24) を比べると

$$L_p-L_v=\frac{m}{2}g^2Q^2 \tag{6.25}$$

である。このことは，二つの測定の型の違いは計器の (負の) 弾性が加わることであることを示している。

Caves et al (1980) は，負の弾性を加えることによって QD 変数 (速度) の測定を QND 変数 (運動量) の測定に変えることができることを示した。QND 変数はいくらでも高い精度で測れる。QND 変数への移行によって調べている系の内部状態をいくらでも精密に評価することができるかという疑問が，当然，生じる。答えは否である。この点をややくわしく考えよう。

座標 q によって直接表わされる速度 $\dot{q}$ は考えている系の運動学的変数である。速度の測定は系の内部状態についての直接の情報を与える。しかし，速度の測定は絶対限界 (標準量子限界) によって制限される。したがって，系の内部状態が速度の測定によっていくらでも高い精度で推定されることはあり得ない。運動量の測定についてはどうだろうか？

運動量 p はいくらでも精密に測れるが，これは動力学的変数であって座標 q との結びつきは間接的である。事実，ハミルトニアン (6.23) の帰結として，次の式

$$p=m\dot{q}-mgQ$$

が成り立つ。したがって運動量 p と運動学的変数 $\dot{q}$ との結びつきは曖昧さのないものではない。それは計器の座標 Q によるのである。この依存性は係数 g とともに (すなわち，p の測定の精度とともに) 増大する。そのため p の測定は，それがどんなに正確なものであっても，系の内部状態についての直接

の情報を与えない。p の測定には限界がないという特徴にもかかわらず，p の測定から得られる状態についての情報は限られる。

それでは運動量 p の測定は役に立たないか？答えは否である。(6.23) 式の結果として

$$\dot{p}=F$$

が成り立つ。したがって運動量 p は外力 F に結びついている。測定の目的がこの力の推定であるならば，運動量の測定は完全に目的にかなっている。力はいくらでも高い精度で，絶対量子限界に制約されずに，推定できる。

以上，われわれは粒子の運動量 p と速度 $\dot{q}$ の測定を二つの異なる方法で考えた：一つは測定装置の具体的なモデルがいらない現象論的径路積分を使うものであり，もう一つは測定装置の一部としての‘計器’の具体的なモデルを使うものであった。それらの結果は同じであって，最後の結論を次のようにまとめることができる：

- 系（1個の粒子）に働く外力 F を推定することが測定の目的であるときは，系の運動量を測ればよい。それはいくらでも精密に測ることができ，力は，測定データから，いくらでも精密に推定することができる。しかし運動量の測定は（測定の量子領域では）測られる系の内部状態については限られた情報しか与えない。

- 測定の目的が測定の間の系の内部状態の推定であるならば，運動量でなく（これは動力学的な量である），運動学的な変数，速度 $\dot{q}$，を測らねばならない。その測定は系の状態について直接の情報を与える。しかし，$\dot{q}$ の測定可能性は上述の絶対量子限界によって制約されており，したがって，こうして得られる状態についての情報も制約される。

- 測定を副次的な系，計器，の助けを借りて行う場合，（制約されない）QND 変数 p の測定と（制約される）QD 変数 $\dot{q}$ の測定とは計器のラ

グランジァンにおける弾性項 $\frac{m}{2}g^2Q^2$ だけ違う。

もちろん，以上のことが成り立つのは量子領域[3]で行われる非常に精密な測定の場合だけである。測定が粗雑なとき，すなわち古典領域で行われるときは，運動量と速度の測定の間には違いはない。どちらも（対応する精度をもって）系の内部状態と系に働く力についての情報を与える。これは式(6.10)と(6.19)から直ちにわかる。実際，古典領域では古典的な関係 $p=m\dot{q}$ が成り立ち，二つの変数は事実上一致する。

以上，もっとも簡単なQND変数，自由粒子の運動量，と対応するQD変数だけを考えた。このことはわれわれが関心を持っている原理的な問題を解決するには十分である。もっと複雑なQND変数とそのモニターもまったく同様に論じることができる。6.4節でもっと複雑なQND変数に径路積分法を適用するときのいくつかの技術的な問題を，原理的な問題には触れずに，考える。

6.4 振動子のQND測定

もっと洗練されたQND測定を径路積分の方法で考える。われわれはGolubtsova and Mensky (1989) の議論に従う。さらにくわしいことはこの論文にある。

オブザーバブル $A=A(p, q)$ のモニターという具体的な場合に(6.5)式を使おう。このモニターの結果（データ）を径路 $[a]$ とする。これは関数 $A(t)$ の推定が $a(t)$ であることを意味する。そのとき振幅(6.5)は

$$U_{[a]}(q', q)=\int_q^{q'} \mathrm{d}[q]\int \mathrm{d}[p]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T (p\dot{q}-H(p, q))\,\mathrm{d}t\right)$$
$$w_{[a]}[p, q] \tag{6.26}$$

という形をとる。この測定を記述する重み汎関数をガウス型

[3] この領域の定義については第4，5章のくわしい分析を見て頂きたい。

$$w_{[a]}[p,\ q]=\exp\left(-\frac{\|A-a\|^2}{\Delta a^2}\right)$$

にとることができる。ここで記号

$$\|\xi\|^2=\frac{1}{T}\int_0^T|\xi(t)|^2\mathrm{d}t$$

を導入した。

振幅(6.26)は，明らかに，

$$U_{[a]}(q',\ q)=\int_q^{q'}\mathrm{d}[q]\int\mathrm{d}[p]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T(p\dot{q}-\tilde{H}(p,\ q)\right)\mathrm{d}t \quad (6.27)$$

と書き直せる。ここで有効ハミルトニアン

$$\tilde{H}=H-\mathrm{i}\gamma(A-a)^2,\quad \gamma=\frac{\hbar}{T\Delta a^2} \quad (6.28)$$

を導入した。

$$A=\rho q+\sigma p \quad (6.29)$$

の形のオブザーバブルAを考えよう。ここでρとσは時間の実関数である。さらに，ハミルトニアンHは2次だとすると径路積分(6.27)はガウス型であり，

$$U_{[a]}(q',\ q)=C\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^T(\tilde{p}\,\dot{\tilde{q}}-\tilde{H}(\tilde{p},\ \tilde{q}))\mathrm{d}t\right) \quad (6.30)$$

となる。ここで$\tilde{p}$，$\tilde{q}$は有効ハミルトニアンに対するハミルトン方程式

$$\dot{p}=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial q},\quad \dot{q}=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p},\quad q(0)=q,\quad q(T)=q' \quad (6.31)$$

の解を表わす。確率密度は

$$P_{[a]}(q',\ q)=|U_{[a]}(q',\ q)|^2=\exp\left(-2\frac{\|\tilde{A}-a\|^2}{\Delta a^2}\right) \quad (6.32)$$

となることが分かる。ここで

$$\tilde{A}=\rho\tilde{q}+\sigma\tilde{p}$$

である。

量(6.32)はAのモニターがデータ$[a]$を与える確率密度と解釈できる。系に働く力が与えられているとすれば測定データの変動を知ることができる。

他方，これによってわれわれは逆問題を解いて，測定結果から力を推定するときの精度を知ることもできる。(6.32) 式が測定装置の誤差だけでなく，測定過程から測定される系への反作用にもとづくデータの変動をも取り入れていることは重要である。この方法は古典測定雑音と量子測定雑音の両方を考慮に入れていると言える。ここで，与えられた型の測定に導く可能なすべての測定装置の中で最良のものが使われることが，暗黙のうちに，仮定されている。言い換えれば，この装置は，測定される系に可能な範囲で最小の乱れしか生じないで，すべての必要な情報を与えるものである。

十分に大きな確率をもつ測定結果 $[a]$ は不等式

$$\|\tilde{A}-a\|^2 \lesssim \frac{\varDelta a^2}{2} \tag{6.33}$$

をみたすことが (6.32) から容易に分かる。事実，この不等式の限界の中では確率密度 (6.32) は近似的に（大きさの程度では）一定であるが，この限界を越えると確率密度は指数関数的に減少する。

ここまでに得られた式を連続 QND 測定の解析に応用しよう。考察はこれらの式が適用できる場合，すなわち，（座標と運動量について）1 次のオブザーバブル (6.29) と 2 次のハミルトニアンの場合に限ることにする。具体的には 1 次元の場合だけ考えるが，多次元系への拡張は簡単であって，実際，Golubtsova and Mensky (1989) が行っている。

(6.31) 式は次の形

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + 2\mathrm{i}\gamma\rho(A-a), \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} - 2\mathrm{i}\gamma\sigma(A-a) \tag{6.34}$$

になる。これを使うと

$$\dot{\tilde{A}} = \left(\dot{\rho} q + \dot{\sigma} p + \rho \frac{\partial H}{\partial p} - \sigma \frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{p=\tilde{p},\ q=\tilde{q}} \tag{6.35}$$

となる。$\gamma = \hbar/\tau\varDelta a^2$ を含む項が (6.35) では打消し合っているので，この式はハミルトニアン H によって生成される古典論の対応する式と一致することに注意しよう。

(6.35) 式の右辺が $\tilde{A}$ の関数，

$$G(\tilde{p},\ \tilde{q}) = \chi(\tilde{A}) \tag{6.36}$$

ここで

$$G(p,\ q) = \dot{\rho}q + \dot{\sigma}p + \rho\frac{\partial H}{\partial p} - \sigma\frac{\partial H}{\partial q},$$

であるとしよう。(6.36) 式が変数 A が QND であるための条件であることが後で分かる。

1 次元の場合[4] 汎関数方程式 (6.36) は微分方程式

$$\sigma\frac{\partial G}{\partial q} = \rho\frac{\partial G}{\partial p},$$

と同等であり，これはまた

$$\rho^2\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} - 2\rho\sigma\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q} + \sigma^2\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \sigma\dot{\rho} - \rho\dot{\sigma} \tag{6.37}$$

と同等である。

(6.37) 式がみたされるときは，$\tilde{A}$ に対する式は

$$\dot{\tilde{A}} = \chi(\tilde{A}) \tag{6.38}$$

の形をとる。この式が古典論と同じ形を持つことは重要である[5]。この式の解はこのオブザーバブルの古典軌跡に他ならない。この場合は不等式 (6.33) の解釈は簡単である。それは，測定データ (関数 $a(t)$) が古典軌跡から (平均二乗偏差の意味で) 測定誤差 Δa より大きくは違わないことを意味する。これは正に古典測定理論でそうあるべきことである。したがって，(条件 (6.37) がみたされるときには) 考える場合に**量子効果が重要でない**ことが結論できる。測定結果の変動は Δa を減らすことによっていくらでも小さくできる。これは QND 測定の特徴である。

径路積分の方法によって (1 次のオブザーバブルと 2 次のハミルトニアンという特殊な場合に) 導かれた QND 測定のこの特徴付けは (6.1) 式と調和

[4] 多次元の場合については Golubtsova and Mensky (1989) を参照。

[5] (6.38) 式の解は，この解が実数であるときに限って，与えられた境界条件 (6.31) に対する古典軌跡と一致する。これは q，q' と $[a]$ との間の関係を与える。例えば，$A=p$，$H=p^2/2m-Fq$ に対してはこの関係は，$m(q'-q)/T=\langle a\rangle$ の形をとる。分布 $P_{[a]}(q',\ q)$ が与えるのは，この関係が十分な精度で成り立つような測定データ $[a]$ だけが確率が高いということであることが分かる。

していることを証明するのはやさしい。事実，もし古典変数Aが(6.38)式をみたすならば，同じ方程式がハイゼンベルク作用素 A_H に対して成り立つ：

$$\dot{A}_H=\chi(A_H)$$

この式の解

$$A_H(t)=\chi_1(A_H(t_0),\ t_0,\ t)$$

は変数Aが(6.1)式をみたすQND変数のクラスに属すことを示す(Caves et al 1980 を参照)。

このように考えるクラスのQND変数は，変数 $\tilde{A}$ が1階微分方程式(6.38)をみたすことを要求すれば生じる。高階微分方程式に対応する別のクラスのQND変数もある。

条件(6.37)を例によって示すために，力が働いている調和振動子

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2}-Fq \tag{6.39}$$

を考える。ここで $F=F(t)$ である。このとき(6.37)式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)=\frac{1}{m}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2+m\omega^2 \tag{6.40}$$

の形をとる。

この式は

$$\frac{\rho}{\sigma}=m\omega\tan[\omega(t-t_0)]$$

の形の解を持つので，われわれは一組の(pとqについて)1次のQND変数

$$A(t)=\sigma(t)[p+qm\omega\tan\omega(t-t_0)] \tag{6.41}$$

を得，それは方程式

$$\dot{A}-\left(\frac{1}{m}\frac{\rho}{\sigma}+\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right)A=\sigma F$$

を満足する。これがQND変数であることは直接証明できる。直角位相成分(6.4)は(6.41)の特殊な場合である。実際，(6.41)のクラスの変数は直角位相成分と時間に依存する因子で違うだけである。

条件(6.37)によって自明でない場合にもQND変数を探すことができる。

例えば，時間に依存する振動数 $\omega=\omega(t)$ を持つ振動子を考えよう。この場合条件 (6.37) は (6.40) 式に導くが，今度はそれはリッカティ方程式である。

$$\frac{\rho}{\sigma}=-m\frac{\dot{v}}{v}$$

と置くことによって，この方程式を変動する振動数を持つ古典振動子の式

$$\ddot{v}+\omega^2(t)v=0$$

に帰着させることができる。(6.40) 式に対する解

$$\frac{\rho}{\sigma}=f(t)$$

が何らかの方法で見つかったとすると，時間に依存する振動数を持つ振動子の QND 変数は

$$A=\sigma(t)(p+qf(t))$$

の形を持ち，式

$$\dot{\tilde{A}}=\left(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right)\tilde{A}+\sigma F$$

をみたす。

ここでは簡単のために 1 次元系だけを考えたが，多次元系もまったく同様に扱える (Golubtsova and Mensky 1989 を参照)。その論文では間接的な QND 測定 (すなわち，測定装置の一部，計器，が具体的に考慮されているモデル) がくわしく考察されている。

7. 電磁場の測定

ここまでわれわれは連続測定の非相対論的な問題，すなわち，時間について延長された測定を扱ってきた。この問題はファインマンの径路積分の制限によって扱うことができる。この章では，量子場のような，相対論的な系の量子測定を考える。場の量子論は場の配位について積分した汎関数積分によって構築することができる。量子場の測定の記述がそのような積分の制限によって得られることは自然である。

くわしく調べるのは電磁場の測定の例だけである。Landau and Peierls (1931) と Bohr and Rosenfeld (1933) の古典的な論文はこの問題に捧げられているから，これは特に興味がある例である。制限された汎関数積分の方法によってこの古典的な領域に新しい光が投げかけられることが分かる。

主な点は電磁場の強さの異なる定義は場の強さの測定可能性への絶対量子制限の存在あるいは非存在について異なる結果に導くことである。

*この章の終りに，われわれは電磁場の測定可能性の問題を研究するために，別のもっと具体的な方法を適用する。場の配位についての積分のかわりに，われわれは場の計器への作用とその反作用とを具体的に考慮する。これによってここまでに得られた結果の物理的意味を，ボーアとローゼンフェルトの古典的結果の物理的意味とともに，明らかにすることができる。場の配位についての積分による制限された径路積分法は測定される場を（測定の過程において）測定誤差以上には乱さないような装置による場の測定可能性の推測を与えることが示される。そのような‘乱さない’測定方法は電子機器における場のコントロールのために必要である。この研究は本書の初版（英語

*ここから**までは，日本語版のために，著者が修正加筆したものである（訳者）。

版)が出版されたあとで，H. フォン・ボルツェスコフスキとの共同研究によって行われた**。

7.1 方法の提示

相対論的な(一般には多成分の)場 Φ を考え，それは場の配位〔Φ〕による作用汎関数

$$S[\Phi]=\int_{\Omega} d^4x L(\Phi,\ \partial\Phi) \tag{7.1}$$

を持つとする。ここでの積分はある時空領域 Ω にわたって行われ，$\partial\Phi$ は座標についての偏微分を表わす。場の量子動力学は場の配位についての積分によって記述できる。振幅

$$U=\int d[\Phi]\exp(\mathrm{i}S[\Phi]) \tag{7.2}$$

を考えよう。積分は，領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ において与えられた条件をみたすような，その領域内での場 Φ のすべての配位にわたって行われる。したがって振幅 U は領域 Ω とならんで境界 $\partial\Omega$ において Φ に課される境界条件にもよる。

ここでは(相対論的な理論でふつう行われるように)自然単位を使っている。すなわち，光速度とプランク定数は1としてある，$c=\hbar=1$。最後の結果はふつうの単位で表わす。

(7.2)の形の振幅は場の量子論で広く使われる。例えば，Ω が二つの空間的な面 $\sum_1$ と $\sum_2$ の間の領域であるとすれば，量(7.2)は二つの面に対応する時刻の間の場の伝播の振幅と解釈できる。もっとはっきり言えば，$\sum_1$ における配位($\sum_1$ における境界条件によってきめられる)が与えられたとき面 $\sum_2$ において場のきまった配位($\sum_2$ における境界条件によってきまる配位)が観測される確率振幅である。

振幅に対する形(7.2)が成り立つのは，領域 Ω の中での場の配位について

情報を得ることができず，すべての配位を同等に扱わねばならない場合である。ある測定が領域 Ω において行われるとしよう。この測定の結果は Ω における場の配位についてある情報を与える。測定データを α で表わし，この結果による場についての情報は正汎関数 $w_\alpha[\Phi]$ によって特徴づけられる。それが意味するのは，測定データ α が与える情報に照らすと $w_\alpha[\Phi]$ が大きいような配位 $[\Phi]$ が確率が高いということである。このとき振幅の表現 (7.2) を

$$U_\alpha=\int d[\Phi]\,w_\alpha[\Phi]\exp(iS[\Phi]) \tag{7.3}$$

に変えなければならない。この式では場の配位についての積分は重み w_α をともなって行われ，それは測定データを参照したそれらの配位の確率を特徴づける。

振幅 (7.3) は異なる測定データの確率を計算するのに使うことができる。そのためには，同じ領域 Ω と $\partial\Omega$ での同じ境界条件を持つが異なる測定データ α に対応する振幅を考える。そのとき量 (7.3) は測定が結果 α を与える確率振幅と解釈できる。この場合 $\partial\Omega$ におけるきめられた境界条件は場についての情報を付け加えるが，その情報は $\partial\Omega$ の，あるいはもっと一般には Ω の外の，点において行われる測定から生じる。絶対値の 2 乗

$$P_\alpha=|U_\alpha|^2$$

はいろいろな測定 α の確率（というよりは確率密度）を与える。これが測定の完全な描像である。

7.2　測定振幅

電磁場の強さの測定の場合の測定振幅 (7.3) を評価しよう (Mensky 1988b)。この場合の汎関数積分 (7.2) は次の形を持つ (Itzykson and Zuber 1980)：

$$U=\int d[A]\,\delta(\partial_\mu A^\mu)\exp\Big(-\frac{i}{4}\int d^4x\,(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)$$
$$(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\Big)\quad。\tag{7.4}$$

積分は付加条件 $\partial_\mu A^\mu=0$ をみたす(領域 Ω の中の)すべてのベクトル・ポテンシャン $A_\mu(x)$ について行われる。付加条件は被積分関数の中のデルタ汎関数によって与えられる。この汎関数は測度の定義に含まれるので，電磁場に対しては (7.2) の記号 $d[\Phi]$ は $d[A]\delta(\partial_\mu A^\mu)$ となる。被積分関数の中の指数は電磁場のラグランジァンを含む。場の強さで表わすと

$$U=\int d[A]\,\delta(\partial_\mu A^\mu)\exp\Big(-\frac{i}{2}\int d^4x\,(\boldsymbol{H}_A{}^2-\boldsymbol{E}_A{}^2)\Big)\tag{7.5}$$

である。$\boldsymbol{H}_A$ と $\boldsymbol{E}_A$ はベクトル・ポテンシャル A_μ に対応する磁場と電場の強さを表わす。

(7.5) 式は領域 Ω における場の配位について情報がないときに成り立つ。領域 Ω の各点で磁場と電場の強さの測定が，対応する誤差 ΔH と ΔE で，行われるとする。測定の結果を配位 $\vec{H}(x)$, $\vec{E}(x)$ で表わすと，場について得られる情報は汎関数

$$w_{[\vec{H},\,\vec{E}]}[A]=\exp\Big[-\frac{1}{\omega}\int a^4x\Big(\frac{(\boldsymbol{H}_A-\vec{H})^2}{\Delta H^2}+\frac{(\boldsymbol{E}_A-\vec{E})^2}{\Delta E^2}\Big)\Big]\tag{7.6}$$

によって特徴づけられる。ω は領域 Ω の測度(4 次元の体積)である。場 $\boldsymbol{H}_A$, $\boldsymbol{E}_A$ の配位 $\vec{H}$, $\vec{E}$ からの 2 乗平均偏差が大きいほど汎関数 (7.6) は小さい[1]。磁場の平均 2 乗偏差が ΔH より大きくなり，そして／あるいは，電場の 2 乗平均偏差が ΔE より大きくなると，汎関数は因子 e だけ小さくなる。

したがって，汎関数 (7.6) はデータ $[\vec{H},\ \vec{E}]$ を与える場の測定に対応する配位の集まりを記述する。この汎関数を式 (7.3) の重み汎関数として採ることができる。すると電磁場の測定の振幅は

[1]汎関数 w_α の本当の形は測定装置の選び方による。しかし本当の形は，大きさの程度の推定のためには重要でなく，ここの考察の目標はそのような推定に限られる。汎関数 (7.6) は考えている測定に対しては十分に現実的であり，また，それはガウス型の汎関数積分を生じるので，計算に便利である。

$$U_{[\vec{H},\ \vec{E}]}=\int d[A]\,\delta(\partial_\mu A^\mu)\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^4x\,(\boldsymbol{H}_A{}^2-\boldsymbol{E}_A{}^2)$$

$$-\frac{1}{\omega}\int d^4x\Big(\frac{(\boldsymbol{H}_A-\vec{H})^2}{\varDelta H^2}+\frac{(\boldsymbol{E}_A-\vec{E})^2}{\varDelta E^2}\Big)\Big] \tag{7.7}$$

となる。

汎関数積分(7.7)はゼロ境界条件に移る標準的なやり方によって積分することができる。$\partial\Omega$ における与えられた境界条件をみたし，オイラー-ラグランジュ方程式の解である(古典的な)場の配位を A^{class} とし，対応する場の強さを $\vec{H}_{\mathrm{class}}$，$\vec{E}_{\mathrm{class}}$ としよう。ベクトル・ポテンシャル B_μ を

$$A_\mu=A_\mu{}^{\mathrm{class}}+B_\mu \tag{7.8}$$

で定義し，それを新しい積分変数とする。B_μ についての積分はゼロ境界条件で行われる。積分(7.7)は次の形になる：

$$U_{[\vec{H},\ \vec{E}]}=\exp(\mathrm{i}S[A^{\mathrm{class}}])\int d[B]\,\delta(\partial_\mu B^\mu)\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^4x$$

$$(\boldsymbol{H}_B{}^2-\boldsymbol{E}_B{}^2)-\frac{1}{\omega}\int d^4x\Big(\frac{(\boldsymbol{H}_B-\boldsymbol{H}')^2}{\varDelta H^2}+\frac{(\boldsymbol{E}_B-\boldsymbol{E}')^2}{\varDelta E^2}\Big)\Big]\quad。 \tag{7.9}$$

$\boldsymbol{H}', \boldsymbol{E}'$ は配位 $\vec{H}, \vec{E}$ を表わすが，ただし‘ゼロ境界条件にした’ものである：

$$\vec{H}=\vec{H}_{\mathrm{class}}+\boldsymbol{H}',\quad \vec{E}=\vec{E}_{\mathrm{class}}+\boldsymbol{E}'\quad。 \tag{7.10}$$

$$\alpha=\frac{\omega\varDelta H^2}{2},\quad \beta=\frac{\omega\varDelta E^2}{2} \tag{7.11}$$

とすると，(7.9)の指数の中の2次形式は

$$\boldsymbol{H}_B{}^2-\mathrm{i}\alpha^{-1}(\boldsymbol{H}_B-\boldsymbol{H}')^2=(1-\mathrm{i}\alpha^{-1})\,\boldsymbol{H}_C{}^2+(1+\mathrm{i}\alpha)^{-1}\boldsymbol{H}'^2 \tag{7.12}$$

となる。ここで

$$\boldsymbol{H}_C=\boldsymbol{H}_B-(1+\mathrm{i}\alpha)^{-1}\boldsymbol{H}'$$

であり，電場についても同様である。その結果，積分(7.9)は

$$U_{[\vec{H},\ \vec{E}]}=\exp(\mathrm{i}S[\mathrm{A}^{\mathrm{class}}]$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^4x[(1+\mathrm{i}\alpha)^{-1}\boldsymbol{H}'^2-(1+\mathrm{i}\beta)^{-1}\boldsymbol{E}'^2])$$

$$\times\int d[B]\,\delta(\partial_\mu B^\mu)\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\int d^4x[(1-\mathrm{i}\alpha^{-1})\boldsymbol{H}_C{}^2$$

$$-(1+\mathrm{i}\beta^{-1})\boldsymbol{E}_C{}^2]\Big) \tag{7.13}$$

となる。積分変数を B_μ から場 $\boldsymbol{H}_C$，$\boldsymbol{E}_C$ に対応するポテンシャル C_μ に変える。すると (7.13) の積分は場 $\boldsymbol{H}'$，$\boldsymbol{E}'$ によらないことが容易にわかる。したがってこの積分は除いてよい (われわれは規格化因子には関心を持たない)。こうして測定振幅の絶対値の 2 乗に対して

$$P_{[\vec{H},\,\vec{E}]}=|\,U_{[\vec{H},\,\vec{E}]}|^2=\exp\left[-\int d^4x\left(\frac{\boldsymbol{H}'^2}{\alpha+\alpha^{-1}}+\frac{\boldsymbol{E}'^2}{\beta+\beta^{-1}}\right)\right] \tag{7.14}$$

が得られる。この量は測定結果が配位〔$\vec{H}$，$\vec{E}$〕で表わされる確率密度に他ならない。

7.3 結果の解析

(7.10)，(7.11) の定義によって，確率分布 (7.14) は次のように表わせる：

$$P_{[\vec{H},\,\vec{E}]}=\exp\left[-\frac{2}{\omega}\int_\Omega d^4x\left(\frac{(\vec{H}-\vec{H}_{\mathrm{class}})^2}{\varDelta H^2+\dfrac{4}{\omega^2\varDelta H^2}}+\frac{(\vec{E}-\vec{E}_{\mathrm{class}})^2}{\varDelta E^2+\dfrac{4}{\omega^2\varDelta E^2}}\right)\right] \quad 。 \tag{7.15}$$

こうして測定結果に対する確率密度が，規格化因子を除いて，見出される。使われるのは異なる測定結果の相対確率だけだから，実際には，規格化は必要ない。

確率分布 (7.15) の解釈は明らかである。領域 Ω における磁場と電場の測定は，$\partial\Omega$ における境界条件によって定義される配位〔$\vec{H}_{\mathrm{class}}$, $\vec{E}_{\mathrm{class}}$〕を生じる確率がもっとも高い。(7.15) に従えば，測定データ〔$\vec{H}$，$\vec{E}$〕は，平均 2 乗偏差

$$\|\vec{H}-\vec{H}_{\mathrm{class}}\|^2=\frac{1}{\omega}\int_\Omega d^4x\,(\vec{H}-\vec{H}_{\mathrm{class}})^2$$

$$\|\vec{E}-\vec{E}_{\mathrm{class}}\|^2=\frac{1}{\omega}\int_\Omega d^4x\,(\vec{E}-\vec{E}_{\mathrm{class}})^2 \tag{7.16}$$

があまり大きくない範囲で，古典的な配位と違いうる。

実際，指数の絶対値が 1 より小さい間は，すなわち，偏差 (7.16) が不等式

$$\|\vec{H}-\vec{H}_{\text{class}}\|^2 \lesssim \delta H^2,\ \ \|\vec{E}-\vec{E}_{\text{class}}\|^2 \lesssim \delta E^2 \tag{7.17}$$

をみたす間は確率密度はその極大値の近くに留まることが (7.15) から分かる。ここで

$$\delta H^2 = \varDelta H^2 + \frac{\varDelta H_{\text{opt}}{}^4}{\varDelta H^2},\ \ \delta E^2 = \varDelta E^2 + \frac{\varDelta E_{\text{opt}}{}^4}{\varDelta E^2} \tag{7.18}$$

であり，

$$\varDelta H_{\text{opt}}{}^2 = \varDelta E_{\text{opt}}{}^2 = \frac{2}{\omega}$$

である。偏差 (7.16)(あるいは少くともその一つ) が臨界値 (7.18) を越えると確率密度 (7.15) は指数関数的に減少し，それに対応する測定結果は，事実上，起こりそうもないことが分かる。言いかえれば，値 (7.18) は測定データの変動範囲を特徴づけるのである。

この分散が，測定の三つの領域で，どうなるかを考えよう。

$$\varDelta H \gg \varDelta H_{\text{opt}},\ \ \varDelta E \gg \varDelta E_{\text{opt}} \tag{7.19}$$

であると，(7.18) 式のそれぞれの右辺の第 2 項が無視できて，(7.18) は

$$\delta H = \varDelta H,\ \ \delta E = \varDelta E \tag{7.19}$$

となる。したがって，この場合，測定データの変動は測定 (装置) の誤差によるものだけであって，古典論と完全に一致している。したがって，$\varDelta H \gg \varDelta H_{\text{opt}}$, $\varDelta E \gg \varDelta E_{\text{opt}}$ という条件の下では測定の古典領域が実現し，量子効果は無視できる。この領域は十分に粗雑な測定に対応する。この領域での測定データの変動は測定が精密になるとともに減少する。

反対に

$$\varDelta H \ll \varDelta H_{\text{opt}},\ \ \varDelta E \ll \varDelta E_{\text{opt}}$$

だと (7.18) の第 1 項は無視できて

$$\delta H = \frac{\varDelta H_{\text{opt}}{}^2}{\varDelta H},\ \ \delta E = \frac{\varDelta E_{\text{opt}}{}^2}{\varDelta E} \tag{7.20}$$

となる。これは測定の量子領域であって，逆説的な特徴を持っている。δH は $\varDelta H$ が減少すると増大する。したがって測定が精密になるほど，測定データの

変動が大きくなる。その結果，場についての客観的な情報は減少する。これは，もちろん，量子場への測定装置からの不可避的な反作用の結果である。同じ結論は電場の測定を特徴づける δE，ΔE についても成り立つ。

測定の最適領域は古典および量子領域の中間にあって，$\Delta H \simeq \Delta H_{\text{opt}}$，$\Delta E \simeq \Delta E_{\text{opt}}$ のときである。このとき測定結果の変動は可能な最小値

$$\delta H_{\min}=\sqrt{2}\Delta H_{\text{opt}}, \quad \delta E_{\min}=\sqrt{2}\Delta E_{\text{opt}} \tag{7.21}$$

をとる。この領域の測定が場の状態について最大の客観的情報を与える。

上の式は，Ω の中で行われる測定によって，Ω の各点において場の強さを推定できる精度の**絶対制限**を示している。空間的な大きさ ℓ，時間の長さ τ の領域 Ω に対しては，場の測定可能性の絶対制限は

$$\delta H_{\min}=\delta E_{\min}=\frac{2}{\sqrt{\tau \ell^3}} \tag{7.22}$$

となる。ここまで自然単位，$c=\hbar=1$，を使ってきた。ふつうの単位では

$$8H_{\min}=\delta E_{\min}=2\sqrt{\frac{\hbar}{\tau \ell^3}} \tag{7.23}$$

である。

注意 1 時空領域 Ω の体積 ω が 1 点での測定の最終の式に現われるのは奇妙に思われるかもしれない。その理由は，各点 $x \in \Omega$ での場の測定は Ω 全体の中で準備されるある種の手続きによって行われるからである。
*(7.23) 式は電磁場の測定可能性の絶対制限を与える。この制限の解釈は以下の節で与える。その解釈は Landau and Peierls (1931) および Bohr and Rosenfeld (1933) の結果との比較を含まなければならない。

Landau and Peierls (1931) は，思考実験によって，電磁場の測定可能性には絶対量子制限が存在すると論じた。彼らが導いた式は (7.23) とは違うが，$\ell=\tau$ の特別の場合には一致する。

Bohr and Rosenfeld (1933) はランダウとパイアールスにつづいて電磁場の測定可能性の問題を再吟味しもっと弱い制限を得た。電磁場の測定可

---

*ここからこの節の終りまでは，日本語版のために訂正・追加されたものである (訳者)。

能性には絶対的な制限はないと彼らは結論した。一見したところ，(7.23)式はランダウとパイアールスの結果を部分的に支持し，ボーアとローゼンフェルトの結果に矛盾するように思われる。実際には事情はもっと複雑である。

以下においてわれわれはこの事情を，測定装置の具体的な考察の助けによるとともに，現象論的な制限された径路積分 (RPI) 法によって研究する。測定可能性についての具体的な結論は‘測定’という言葉で何を意味するか，‘測定’の過程についてどういう要求をするかによることが示される。

まず第 1 に 7.4 節では，電磁場の測定が，ここまでのやり方でなく，別のようにも記述できることが，制限径路積分 (RPI) 法の枠内で示される。この新しい定義では測定可能性についての絶対制限は存在しないことが結論される。これはボーアとローゼンフェルトの結論に一致する。7.5 節では (別の場を計器と考えて) 測定のこの二つの定義の物理的意味を分析する。この違いは測定の量子領域にだけ生じ，古典領域には存在しない。

つづいて，(7.23) の制限の物理的意味を見出すために，もっと簡単ではっきりした測定のモデルを考察し，ある条件の下で物理的意味をもっと正確にする。

7.4　場の強さの別の定義

(7.6) の形の重み汎関数を選ぶに当って，われわれは場の強さの定義

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_A&=(\partial_0 A_1-\partial_1 A_0,\ \partial_0 A_2-\partial_2 A_0,\ \partial_0 A_3-\partial_3 A_0)\\ \boldsymbol{E}_A&=(\partial_2 A_3-\partial_3 A_2,\ \partial_3 A_1-\partial_1 A_3,\ \partial_1 A_2-\partial_2 A_1)\end{aligned} \tag{7.24}$$

を採用した。この定義は自然であり，唯一の可能なものとさえ見える。しかし，(7.4) の代わりに，電磁場の作用としていわゆる 1 階形を使い，振幅に対して対応する形を使うと別の可能性が生じる (Itzykson and Zuber 1980)。この可能性を Mensky (1989) の論文に従って考えよう。

振幅として次の形を選ぶ：

$$U=\int \mathrm{d}[A]\int \mathrm{d}[F]\exp\left(\mathrm{i}\int_{\Omega}\mathrm{d}^4xL(A,\ F)\right)\quad。\tag{7.25}$$

ここで

$$L=\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\tag{7.26}$$

は電磁場の1階のラグランジアンであり，

$$\mathrm{d}[A]=\delta(\partial_\mu A^\mu)\prod_{\mu,x}\mathrm{d}A_\mu(x),\quad \mathrm{d}[F]=\prod_{\mu,\nu,x}\mathrm{d}F_{\mu,\nu}(x)$$

は汎関数積分の場の配位についての測度である。振幅(7.25)の物理的意味は時空領域 Ω とこの領域の境界 $\partial\Omega$ において場の配位 $[A, F]$ について課される条件の選び方による。

測定過程を研究するために，(7.25)の代わりに重み汎関数を含む振幅

$$U_{[\vec{H},\ \vec{E}]}=\int \mathrm{d}[A]\mathrm{d}[F]\exp\left(\mathrm{i}\int_{\Omega}\mathrm{d}^4xL(A,\ F)\right)w_{[\vec{H},\ \vec{E}]}[A,\ F]\tag{7.27}$$

を導入しよう。$[\vec{H},\ \vec{E}]$ は領域 Ω における電場と磁場の強さ $\vec{H}(x)$. $\vec{E}(x)$ の配位である。この配位は測定データを表わし，汎関数 $w_{[\vec{H},\ \vec{E}]}$ はこの測定を記述する。

汎関数を定義(7.24)にもとづく形

$$w_{[\vec{H},\ \vec{E}]}{}^A[A,\ F]=\exp\left[-\frac{1}{\omega}\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{(\vec{H}-\boldsymbol{H}_A)^2}{\Delta H^2}+\frac{(\vec{E}-\boldsymbol{E}_A)^2}{\Delta E^2}\right)\right]\tag{7.28}$$

に選べば，前の節の結果が再現される。しかし汎関数を別の形

$$w^F{}_{[\vec{H},\ \vec{E}]}[A,\ F]=\exp\left[-\frac{1}{\omega}\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{(\vec{H}-\boldsymbol{H}_F)^2}{\Delta H^2}+\frac{(\vec{E}-\boldsymbol{E}_F)^2}{\Delta E^2}\right)\right]\tag{7.29}$$

に選ぶことができる(Mensky 1989)。ここで場の強さの別の定義

$$\boldsymbol{H}_F=(F_{01},\ F_{02},\ F_{03}),\ \boldsymbol{E}_F=(F_{23},\ F_{31},\ F_{12})\tag{7.30}$$

が使われている。

(7.28)の選び方は，汎関数 $w_{[\vec{H},\ \vec{E}]}{}^A[A,\ F]$ は実際には $[F]$ によらないから，前の結果を再現する。したがって $[F]$ についての積分は解析的に行えるので，問題は前の節と同じ積分に帰着される。特に，電磁場の測定可能性についてLandau and Peierls (1931) が得た型の絶対制限(7.21)—(7.23)が，そ

のようにして，予言される。

さて，測定汎関数(7.29)の選択，すなわち，場の強さの定義(7.30)と結びついた第2の可能性を考えよう。この場合の測定データの分布を計算するには，積分(7.27)の汎関数に(7.29)を代入すればよい。計算の詳細を追うのは止めて，ここでは最後の結果だけ与える。この場合の測定データの分布は

$$P^F{}_{[\vec{H},\ \vec{E}]}=\exp\left[-\frac{\omega}{2}\int_\Omega \mathrm{d}^4x\left(\frac{(\vec{H}-\vec{H}_{\mathrm{class}})^2}{\Delta H^2}+\frac{(\vec{E}-\vec{E}_{\mathrm{class}})^2}{\Delta E^2}\right)\right] \qquad (7.31)$$

である。

この式から，測定の結果として得られる電場の配位 $[\vec{E}]$ は古典的配位 $[\vec{E}_{\mathrm{class}}]$ から ΔE の程度の大きさまで違うことが可能であり，それは測定誤差と一致することが分かる。同様に，磁場の測定結果 $[\vec{H}]$ の古典的配位 $[\vec{H}_{\mathrm{class}}]$ からの違いは ΔH を越えない。このように測定結果の拡がりは，この場合，測定の結果の誤差だけできまり，量子効果は重要でない。

測定誤差 ΔH, ΔE が減少すると拡がりはいくらでも小さくできる。したがってこの場合，場の強さの測定可能性には絶対制限はなく，それは Bohr and Rosenfeld (1933) の結論と一致している。

量子論の枠内で電磁場の強さは二つの方法で定義できる：ポテンシャルの‘廻転’(7.24)として，あるいは，場のテンソル(7.30)としてである。もし第1の定義を使えば，場の強さの測定を考える形式的なやり方は(ランダウとパイアールスの結果に一致して)測定可能性についての絶対制限に導く。もし第2の定義を使えば，同じやり方は(ボーアとローゼンフェントに一致して)絶対制限には導かない。ここで，異なる定義は異なる型の測定に対応し，それぞれがそれ自身の長所を持つことを示そう。

7.5　計器の具体的なモデル

量子力学における測定過程を分析するには，しばしば‘計器’と呼ばれる，装置の中の高感度な要素の簡単なモデルを使うとよい。装置の中の純粋に古

典的な部分は，そのとき，具体的に考えなくてよい。装置と測定される系との結合は相互作用ラグランジアンによって記述され，それは測定される量と計器の座標の積に比例する。われわれが関心を持つのは測定される量が場の場合だから，計器の座標の役をするのもある場でなければならない。それを $G^{\mu\nu}(x)$ としよう。計器のラグランジアンを $L_G(G)$ とする。すると測定を記述する全ラグランジアンは，われわれが測定するのがポテンシァルの‘廻転’ならば

$$L_A(A,\ F,\ G)=L(A,\ F)+ g(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)G^{\mu\nu}+L_G(G) \tag{7.32}$$

の形を持ち，場のテンソルが測定されるときは

$$L_F(A,\ F,\ G)=L(A,\ F)+gF_{\mu\nu}G^{\mu\nu}+L_G(G) \tag{7.33}$$

の形を持つ。

二つの測定の仕組みを比べるためにラグランジアン(7.32)と(7.33)から，ポテンシャル A_μ と場 $G^{\mu\nu}$ だけを含みテンソル $F_{\mu\nu}$ を含まない同等なラグランジアンに移る：

$$L_A(A,\ G)=L(A)+g(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)G^{\mu\nu} +L_G(G) \tag{7.34}$$

$$L_F(A,\ G)=L(A)+g(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)G^{\mu\nu} +L'_G(G) \quad 。 \tag{7.35}$$

これらのラグランジアンの違いは計器の座標の2次の項だけである：

$$L_F(A,\ G)-L_A(A,\ G)=L'_G(G)-L_G(G)=-g^2G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \quad 。$$

この違いはランダウ-パイアールスとボーア-ローゼンフェルトの測定の仕組みの違いとまったく似ている。この違いは，例えば，De Witt (1964)の分析からはっきりわかる。違いが生じるのは，ランダウとパイアールスに比べて，ボーアとローゼンフェルトが，ある測定誤差を‘消去する’ために，計器のラグランジアンに余分な2次の項を導入したためである。

* したがって，測定が $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ についてなされるならば，測定には絶対限

---

* ここから** までの文章は，日本語版の作成に当って著者が修正したものである(訳者)。

界(7.21)—(7.23)があり，テンソル $F_{\mu\nu}$ が測定されるのならば，測定可能性には絶対制限はない。**

まず，電磁場の測定自体が目的ではなくて，それが電磁場と相互作用しているある他の場を推定するために使われる場合を考えよう。この場を Φ と表わすことにする。$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ か $F_{\mu\nu}$ のどちらかを測定すれば Φ のある推定が与えられる。ポテンシャルの'廻転'は(7.21)—(7.23)より以上の精度では測定できないから，場 Φ の測定にも制限が生じる。場の強さ $F_{\mu\nu}$ が測定されるときにはその制限は生じない。もちろん，場 Φ 自身の量子性による制限はありうる。しかし，場 Φ の量子性が無視できる限りは，$F_{\mu\nu}$ の測定によるこの場の推定はいくらでも正確にできる。このように，測定の目的が古典的な外場を推定することにあるならば(言いかえれば，この場の間接的な測定をすることにあるならば)，場の強さの測定は(ポテンシャルの'廻転'の測定よりも)すぐれている。

しかし，異なった状況が起こりうる。それは電磁場の強さ自身の測定が目的である場合である。この場合，重要なのは $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ が，直接，電磁場の状態を記述することを想起することである：それは場の運動学的な特徴付けである。ポテンシャルの'廻転'を測定することによって，場の内部状態が直接推定されるのであって，量子限界(7.21)—(7.23)は場の内部状態の客観的推定がどこまで許されるかを示すものである。

テンソル $F_{\mu\nu}$ は動力学的な量としてポテンシャルの'廻転'に結合するので，場の内部状態を間接的に特徴づける。したがって，場のテンソル $F_{\mu\nu}$ を測定するときは，場の内部状態を間接的にしか推定できない：$F_{\mu\nu}$ の測定の結果，われわれは $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を推定し，それが最後に場の状態についての情報を与える。ラグランジァン(7.33)から，場のテンソルとポテンシャルの'廻転'とは

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} + 2gG_{\mu\nu}$$

によって結ばれている。したがって $F_{\mu\nu}$ の測定によって $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を推定できる精度は

$$\Delta(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)=\Delta F_{\mu\nu}+2g\Delta G_{\mu\nu}$$

である。$\Delta F_{\mu\nu}$ を小さくするには結合定数 g を大きくする必要があるが，すると $2g\Delta G_{\mu\nu}$ の項が大きくなる。結合定数の最適値の結果として，ポテンシャルの‘廻転’の推定の誤差はある絶対限界より小さくはありえない。こうしてテンソル $F_{\mu\nu}$ による電磁場の内部状態の推定は，ポテンシャルの‘廻転’が測定される場合と同じく，量子制限に打ち当る。この場合，テンソルの測定には利点はない。

上の議論をさらに明瞭にするには，$F_{\mu\nu}$ の測定可能性に量子制限がないのは，たとえ誤差 $\Delta G_{\mu\nu}$ が有限に止っても結合定数 g を大きくすることによって誤差 $\Delta F_{\mu\nu}$ をいくらでも小さくできることがラグランジァン (7.33) から導かれるためであることに注意すればよい。すぐ上で見たように，このことは $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ の正確な推定を許さない。

この議論の最終的な結論を次のように定式化することができる：

* “廻転”の測定は電磁場の内部状態の直接の決定を許すが，それには絶対量子限界 (7.21)—(7.23) がともなう。場のテンソル $F_{\mu\nu}$ の測定によって，電磁場と相互作用している古典場の配位を推定することができる。しかし電磁場自体の内部状態の推定は量子限界に打ち当る。それは同じ式 (7.21)—(7.23) で表わされると思われるが，まだ証明はされていない。**

注意 2 以上の分析でわれわれの結果を Landau and Peierls (1931) および Bohr and Rosenfeld (1933) の結果と比べたけれども，われわれが実際に調べたのは時空領域 Ω にある場の点状の測定であるのに対して，引用した論文で考えられたのはこの領域での平均場を測定する問題であった。後者の問題への径路積分の応用は Mensky (1989) によって行われた。結果はここで得たものと同じである。

注意 3 量子測定に関係して生じる変数 $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ と $F_{\mu\nu}$ との違い

* ここから** までの文章は日本語版の作成に当って著者が修正したものである (訳者)。

は自由粒子の運動量 p と速度（掛ける質量）$m\dot{q}$ との違いによく似ている。後者は第6章の6.3節でくわしく分析されている。

注意 4 (7.21)—(7.23) 式は電磁場の測定可能性に関して，この場の量子性から生じる制限を表わす。さらに別の制限が，原理的には，物質の離散的性質から，すなわち，一定の性質 $(m, e, \cdots)$ を持った粒子（例えば電子）の助けを借りて測定をしなければならないことから生じ得る。*** このことは，部分的には，7.6.3節で議論される。

7.6 電磁場のかき乱さない測定

電磁場に適用したときの制限された径路積分 (RPI) 法の物理的意味をもっとはっきりさせるために，Borzeszkowski and Mensky (1994) に従って，計器への場の影響と計器の反作用とをもっと具体的に考える。その結果，RPI法を適用できる測定の概念が決定される。そのような測定を‘かき乱さない’と言うことにする。それは測定される状態（いまの場合場の状態）を測定誤差以上には変えないような測定である。

実際は，測定誤差を（測定によって惹き起こされる変形よりも大きく）適当に定義すれば，どの測定もかき乱さないものと考えることができる。われわれの最終的な結論は，RPI法によって得られる不確定 δE は測定をかき乱さないものと考え得る限界を与える，ということである。

さらに，測定領域の空間と時間の大きさが不等式 $\ell < c\tau/137$ あるいは $\ell > c\tau$ をみたすときには，かき乱さない測定に対するもっと強い制限が得られる。この補正のあるものは電荷の量子化から生じる。

簡単のために，この節では電場だけを考えるが，磁場も同様に扱える。

*** この文章と7.6節全体は，日本語版の作成に当って著者が追加したものである（訳者）。

7.6.1 反作用の具体的な扱い

ここまでの節で使った制限された経路積分法は，測定のある定義（7.6.2 節でこの定義をくわしく論じる）に対して，電磁場の測定可能性の絶対限界を与える。このことは，量子測定雑音のために，場の強さの値について(7.23)式が表わす以上の精密な情報は得られないことを意味する。現象論的な制限された経路積分法からは量子雑音の原因が何でありどの因子がそれに寄与するかは明らかでない。この節の残りでその問題を分析する。

われわれは測定雑音が二つの特徴的な部分，すなわち，探査体の力学的不確定とこの探査体の固有場，から成ることを示す。Bohr and Rosenfeld (1933) の有名な論文で取り入れられたのは第 1 の部分である。Borzeszkowski and Treder (1988) の本ではこの部分は制限された経路積分法（ただし，場の配位については積分せず，力学的な試験体の径路の積分によって）を用いて見出された。これらの研究の結果はこの節で見直すことになる。

ボーアとローゼンフェルトは，ハイゼンベルクの不確定性原理を考慮することによって，電場の測定可能性の推定，

$$\delta E_{BR}=\frac{\hbar c}{\Delta x c\tau Q} \tag{7.36}$$

を導いた。場の測定のためには，探査電荷の運動を観測して，その運動量を見出さなければならない。ところが観測の際電荷の位置を正確にきめると不確定性原理によって運動量の正確な決定ができなくなる。場を推定する際の誤差として可能な最小のもの(7.36)は測定過程の最適化によって生じる。

測定する電荷の観測を制限された径路積分法によって考えれば，Borzeszkowski and Treder (1988) も同じ結論に達する。

例えば，この電荷を振動数[2] ω の振動子とし，測定される運動の固有振動数を Ω としよう。すると測定誤差の最適値は

$$\Delta x=\left(\frac{\hbar}{m\tau\left|\Omega^2-\omega^2\right|}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.37}$$

[2] 自由電荷は特別な場合 $\omega=0$ として考えることができる。

であることがわかり (第5章を見よ), 振動子に働く力を推定できる精度は

$$\delta F=\left(\frac{m\hbar\,|\,\Omega^2-\omega^2\,|}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.38}$$

である。

$F=QE$ であることを考え, 上の式を掛けると, 場の測定値の不確定として ボーアとローゼンフェルトの論文と同じく

$$\delta E_{\mathrm{mech}}=\delta E_{BR}=\frac{\hbar c}{\Delta x c\tau Q} \tag{7.39}$$

を得る。

この式は非常に簡単で特徴的な構造を持っている。実際, $Q\Delta E$ が力の不確定であることと $\Delta p=Q\Delta E\tau$ が測定体に働く運動量の不確定であることを考慮すると, (7.39) 式はこの測定体に働く不確定性関係[3], $\Delta p\Delta x=\hbar$, に帰着する。

この節で論じられている不確定性は, 場の測定に使われる力学的な験体の量子不確定の結果であることに注意しよう。この力学的験体が, 場と相互作用するためには, 電荷を持たなければならないことを考えると, 測定体の固有場の問題が生じる。

固有場の問題は文献に特に Bohr and Rosenfeld (1933) に論じられている。そこでは, 固有場は計算できるので (つまり, 系統的誤差として考慮に入れることができるので) 測定を妨げないと結論されていた。しかしわれわれはこの問題を新しい光の下で考える。われわれはこの系統的誤差が測定の目的にとって妨げになる場合を考える。これは, 例えば, 測定が場をコントロールすることを目的とする場合であり, そのとき, 観測者が知りたいのは, 測定の影響も取り入れて, 場の値がどうなるかである。問題のこの設定のしかたは, まさに, 制限された径路積分の方法にぴったりであることがわかる。

[3] 測定の極限 (量子論の意味で最適な) 領域を表わすために, 不等式でなく, 等式を使う。

7.6.2 測定がかき乱さないものであるような精度

Bohr and Rosenfeld (1933) の論文では不確定 (7.39) が測定に対する唯一の妨げと考えられており，ある見方からすれば，その通りである。しかし，測定の間に加わる場を含む別の量，δE，を測定を特徴づけるものとして導入することができる。

その動機ははっきりしている。ある場合には，測定の目的は測定が実際に行われなかったとすれば場はどうであったろうということではなくて，実際の状況をすべて，なかんずく測定自身を取り入れたとき，場が現実にどうであるかを推定することである。もし量 δE が分かれば，精度 ΔE をもって，場が実際に測定データ，E，に等しいことは確かである。

この新しい指標に対して明らかに式

$$\delta E = \delta E_{\mathrm{mech}} + E_{\mathrm{meas}} \tag{7.40}$$

が成り立つ，E_{meas} は測定する物体によって作られる完全な場である。

測定する物体が電荷 Q を持つとし，測定は大きさ ℓ の領域内で行われるとする。その物体の，測定領域の典型的な点における，場に対するもっとも簡単な推定としてクーロンの式

$$E_{\mathrm{meas}} = \frac{Q}{\ell^2} \tag{7.41}$$

を採用しよう[4]。すると

$$\delta E = \frac{\hbar c}{\Delta x c\tau Q} + \frac{Q}{\ell^2} \tag{7.42}$$

である。

(7.42) 式から測定の完全な (付加される場を入れた) 不確定 δE が (測定領域の与えられた大きさ，ℓ と τ，に対して) 測定する物体の電荷 Q と力学的な計器の測定誤差，Δx，によることが分かる。われわれはそれらのパラメーターを不確定 δE が最小になるように選ばなければならない。それがかき乱さ

[4] この推定は，最終的に，前に場の配位についての積分によって見出したのと同じ測定可能性の絶対制限 (7.23) に導く。クーロン場の代わりに輻射場を採ると絶対制限に対するランダウとパイアールスの式が得られる。けれども，輻射場が本質的になるのは ℓ が $c\tau$ と同程度の場合だけである。これがランダウとパイアールスの式がその領域でだけ成り立つ理由である。

れない方式における場の測定可能性の絶対限界を与える。

初めに誤差 Δx を固定したときの電荷 Q の選び方を考えよう。(7.42) は

$$Q_{\mathrm{opt}}{}^2 = \hbar c \frac{\ell^2}{\Delta x c\tau} \tag{7.43}$$

をみたす電荷に対して最小になることは明らかである。電荷のこの値に対して不確定は

$$\delta E_{\mathrm{opt}} = 2\sqrt{\frac{\hbar c}{\Delta x c\tau \ell^2}} \tag{7.44}$$

である。

ここで不確定 δE_{opt} を減らすには Δx を増せばよいことが分かる。ところが，測定する物体の位置の測定の誤差 Δx は測定する領域の大きさ ℓ より大きくはあり得ない：

$$\Delta x \leq \ell \quad 。 \tag{7.45}$$

$\Delta x = \ell$ ととると[5]，可能な最小の不確定として

$$\delta E_{\mathrm{abs}} = 2\sqrt{\frac{\hbar c}{c\tau \ell^3}} \tag{7.46}$$

を得る。この推定値が制限された径路積分法によって見出された推定値 (7.23) と一致することは明らかである。

(7.46) 式とこの式に導く分析は推定値 (7.23) の，もっと一般には径路積分法によって見出される推定値の意味をいっそうはっきりさせる。われわれはこの方法がかき乱さない測定に対する制限を与えることを知る。測定データが E であり径路積分によって見出されるデータの不確定が δE であるとすると，測定する物体の場を考慮に入れても，場は現実に間隔 $[E-\delta E,\ E+\delta E]$ の限界の中にあったことを知る。

7.6.3 電荷の量子化を取り入れること

$Q = Q_{\mathrm{opt}}$ と $\Delta x = \ell$ という選び方が可能であって，上述の推定値が得られる

---

[5] 次の節でこれが不可能である場合を考える。

場合をもっと注意深く考えよう。問題は，(7.43) の関係によれば，Δx を大きくすると Q_{opt} が小さくなることである。$\Delta x=\ell$ に選ぶと電荷 Q_{opt} に対してある値が決まるが，この値が可能である，すなわち，電子の電荷より大きい，

$$Q_{\mathrm{opt}}>e$$

ことが確かでなければならない。そうでなければ Δx の値を ℓ より小さくとらなければならない。

Q_{opt} の値が e になるような $\ell/\Delta x$ の値は

$$\frac{\ell}{\Delta x}=\frac{1}{137}\frac{c\tau}{\ell}$$

である。1/137 は微細構造定数，$e^2/\hbar c$，の (近似) 値である。したがって，$\ell/\Delta x$ は上のように 1 にではなく

$$\frac{\ell}{\Delta x}=\max\left(1,\ \frac{1}{137}\frac{c\tau}{\ell}\right)$$

に選ばなければならない。

故に式 (7.46) に導く前述の考察は $\ell/c\tau$ が 1/137 より大きいときだけ成り立つ。その反対の不等式

$$\frac{\ell}{c\tau}\leqq\frac{1}{137}$$

が成り立つときは推定値は

$$\delta E_{\mathrm{abs}}=\frac{2e}{\ell^2}=\frac{1}{6}\frac{\sqrt{\hbar c}}{\ell^2} \tag{7.47}$$

となる。ここで 1/6 は $2/\sqrt{137}$ の近似値である。この推定は測定する電荷の最適値が e であるときに成り立つ。

後者の式には物質の離散的な構造が考慮されている。これは現象論的な制限された径路積分法の枠組みでは扱えない点である。

7.6.4 因果関係を取り入れること

時間 τ の間に大きさ ℓ の空間領域で行われる測定を考え，不等式

$$\ell>c\tau \tag{7.48}$$

が成り立つとしよう。このとき測定領域は以下の意味で“非因果的”である。大きさ ℓ の空間領域の中には，測定の時間，τ，の間には，光速度以下の信号では互いに結ばれない小さな部分領域(大きさを λ としておこう)が存在する。そのような部分領域で起こった二つの事象は互いに因果的な影響を及ぼし得ない。そのような部分領域は因果的に非連結なのである。そのため，測定が行われる時空領域の全体はこの意味で“非因果的”である。

ボーアとローゼンフェルトはこのような非因果的な測定領域を考えた。これがわれわれもこのような領域を考える理由である。この場合にも推定(7.46)，(7.23) は正しくないことが分かる[6]。

(7.39) 式は非因果的領域の場合にも成り立つ。しかし，式(7.46)，(7.23) はそのような領域では使えない。代わって，$\ell=c\tau$ をそれらの式に代入しなければならない。その理由は以下の通りである。

(7.6) とそれにつづく式の中の量 Ω は，小さい領域で行われる測定に還元できないような，“統一的な”測定が行われる領域の 4 次元体積である。もし“要素的な”測定が体積 $\omega=\lambda^3 c\tau$ の領域で行われるのならば，この体積を (7.6) の指数の分母に代入しなければならない(ただし積分は全領域 Ω にわたる)。いろいろな測定データに対して得られる推定は

$$\Delta E_{\rm opt}{}^2=\Delta H_{\rm opt}{}^2=\frac{2}{\omega} \tag{7.49}$$

$$\delta E_{\rm min}=\delta H_{\rm min}=2\sqrt{\frac{\hbar}{\tau\lambda^3}} \tag{7.50}$$

である。 $\ell<c\tau$ のときは“統一的な”測定が可能である。しかし $\ell>c\tau$ であると，測定過程は全領域の中の因果的な部分で行われる独立な過程の系列に分解される。そのような部分の最大の大きさは $\ell=c\tau$ である。これが，この場合，$\omega=\lambda(c\tau)^3=(c\tau)^4$ としなければならない理由である。すると

$$\delta E_{\rm min}=2\frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\tau)^2} \tag{7.51}$$

[6] けれども，ここでは，BR の論文と違う性質の測定を考えているので，彼らとわれわれの結果を直接比べることはできないことに注意しなければならない。

となる。

測定する物体の場を取り入れることについての議論も，非因果的な領域の中の因果的な部分における場を別々に考えなければならないから，変えなければならない。そのような部分領域における測定する物体の電荷を q としよう。すると (7.42) 式のかわりに

$$\delta E = \frac{\hbar c}{\Delta x c\tau q} + \frac{q}{\lambda^2} = \frac{\hbar c}{\Delta x c\tau q} + \frac{q}{(c\tau)^2} \tag{7.52}$$

となる。($\Delta x < \lambda = c\tau$ を考慮に入れた) この式の最適化は

$$\delta E_{\text{abs}} = 2\frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\tau)^2} \tag{7.53}$$

を与える。このように非因果的な場合にも二つの方法は同じ結果を与えるが，それは因果的な領域で得られるものとは違う。

7.6.5 議　　論

ここでは電場の測定を二つの異なる方法で考え，それらの結果を比較した。制限された径路積分にもとづく第1の方法は現象論的である。第2の方法は，測定する物体の電荷とともに，力学的性質をも具体的に考慮する。第2の方法の適用では，1) 力学系としての測定する物体に対する不確定性関係と 2) 外場のかき乱さない測定に対する妨げとしての測定する物体の固有場の両方を考慮した。

二つの方法の結果を比較することによって，次の結論が得られる：

- 制限された径路積分 (RPI) 法で得られる測定の不確定 δE は測定をかき乱さないものと考えてよいときの精度を決定する。

- RPI 法で得られた δE の値 (7.23), (7.46) は τ の程度の時間の間に ℓ の程度の大きさの空間で行われるかき乱されない測定に対する絶対制限である。

- RPI 法は物質の離散的な構造，とくにどんな電荷も電子の電荷 e に等し

い電荷の和であることを，考慮していない。このことを考慮に入れると，$\ell < c\tau/137$ の場合，かき乱さない測定に対して (RPI 法よりも) 強い制限 (7.47) を得る。

- $\ell > c\tau$，すなわち非因果的な測定領域では，RPI 法は個々の因果的な部分領域に別々に適用しなければならない。それは一般の場合よりも強い制限 (7.51) を与える。

8. 量子宇宙論における時間

この章では連続測定の量子論を量子宇宙の研究に，その自己測定を考慮して，適用する。量子宇宙における時間の問題がそのような考察にもとづいて解決できることを示す。

量子宇宙を記述するにはふつうホイーラー-デヴィット (Wheeler-De Witt) 方程式が使われる。しかしこの式から導かれる動力学はつまらないものである。言い換えれば時間発展がまったくない。時間は量子宇宙の動力学の半古典論的な (WKB) 分析から得ることもできる。われわれは，それに代えて，宇宙の自己測定を考慮すれば，時間はごく自然に生じることを示す。

ある一般的な考察につづいて，量子宇宙の動力学を記述する振幅 (伝播子) を具体的に，簡単な超空間モデルに対して，評価する。その自己測定の結果として量子宇宙の重要な時間発展が生じることが示される。ホイーラー-デヴィットの動力学は測定の影響を無視できる小さな時間に対して成り立ち，時間依存性は消え去ることが分かる。

この章の構成は以下の通りである。量子宇宙論における時間の問題を 8.1 節で定式化する。連続測定の径路積分理論を量子宇宙論に適用する方法を，8.2 節で一般的な形で簡単に述べ，8.3 節で導入されるミニ超空間モデルの範囲での議論を 8.4 節で述べる。得られた伝播子の分析を 8.5 節で行い，8.6 節で短い結論を導く。

8.1 問題の設定

宇宙の波動関数についての Hartle and Hawking (1983) の研究以来，量子

宇宙は大きな関心の的である (例えば Hartle 1988, Calzetta 1989, Unruh 1989, Halliwell 1989, Padmanabhan 1989, Zeh 1992, Grishchuk 1989 およびそれらに引用されれている文献を見よ)。量子宇宙についての研究はふつうホイーラー-デヴィット方程式にもとづいており，それは宇宙の波動関数のトリビアルな時間依存性に導く。量子宇宙論には時間の概念がないと言ってよい。それは量子宇宙の時間発展を導くときと，量子宇宙から古典宇宙へ移行するときに困難を生じる。

Zeh (1986, 1988 b) と Kiefer (1987) の最近の研究は，古典的な時間の概念の導入を目的として，量子宇宙の自己測定を具体的に考えた。自己測定とは宇宙のある自由度を，他の自由度の助けを借りて，測定することと理解される。

この章の目的は量子宇宙の自己測定を連続測定の現象論的な径路積分量子論の枠内で (Mensky (1990 a) の論文に沿って) 扱うことである。これによって幾何学的に定義される時間を量子宇宙論的に具体的に持ち込むことができる。

一般式のほかに，幾何学的性質の測定の下での量子宇宙の発展を記述する伝播子を，幾何学的性質が推移関数とスケール因子で記述される簡単なミニ超空間モデルの枠内で，評価し分析する。この伝播子はトリビアルでなく時間に依存し，Halliwell (1988) が得たものを一般化したものであって，十分に短い時間に対しては Halliwell の伝播子と一致する。この極限でのみ伝播子はホイーラー-デヴィット方程式をみたす。

量子宇宙論における時間の問題は，この理論ではホイーラー-デヴィット方程式 (De Witt 1967, Wheeler 1968)

$$\hat{H}\Psi=0 \tag{8.1}$$

が成り立ち，宇宙波 Ψ が時間に依存しないことから生じる。これは重力における時間パラメーターの非物理的性格の結果である。実際，一般座標変換の下での理論の不変性によって，古典重力では，宇宙の時間切片を数えるどん

な仕方も同等である。これは古典重力におけるハミルトニアン拘束条件 $H(p, q)=0$ に導く。量子宇宙論ではその結果は時間発展という描像が存在しないことである。

この困難を克服するために，ホイーラー-デヴィット方程式が双曲的でありスケール因子 a(宇宙の大きさ)がこの方程式における時間的な座標であることを使うことが提案された。そのときパラメーター a は，‘内部座標’として使われる。ほかに量子宇宙論における時間を確率的に定義するという提案がある (Castagnino 1988)。しかしこの問題の議論はまだつづいている。

少し前，Joos (1986) は物質は実際上幾何学的性質を測定していると論じた。Zeh (1986) はこの型の測定(すなわち，量子系としての宇宙の自己測定)を使って時間を量子宇宙論に導入することを提案した。彼は量子宇宙を，Halliwell and Hawking (1985) が示唆したように，多重極によって記述することにもとづく測定モデルを使った。

量子宇宙の自己測定が量子宇宙論における時間の生成に導くというアイデアはさらに Zeh (1988 b) と Kiefer (1987) によってくわしく研究された。これらの研究とさらにそれにつづく研究(例えば Halliwell 1989, Padmanabhan 1989) では，自己測定の結果として生じパラメーター a の古典的性格に導く，非干渉化の現象が研究された。しかし，‘内部時間’ a を除いては，時間のパラメーターは導入されていない。このことは宇宙の膨張の概念の同語反覆的な性格に導く。ほかにもいくつかの困難が生じる。例えば，宇宙の膨張が収縮に変るときのスケール因子の転回点の記述である (Halliwell 1989)。

われわれは，自己測定の結果として得られる幾何学的性質の定量的な特徴づけとして，時間を導入することが可能であることを示す。そのような時間のパラメータはスケール因子 a には無関係である。以下では，このプログラムを量子連続測定の径路積分理論を用いて実行する。

主なアイデアは，量子系の理論はこの系の測定の具体的な記述なしには不完全だということである。量子系の発展の完全な描像はこの系の連続(時間的に伸ばされた)測定を具体的に考えることなしには不可能である (第 4 章

を見よ)。同じことは量子宇宙に対しても成り立つはずである。宇宙の連続測定を考慮に入れると動力学の変化が起こり，時間依存性がひとりでに生じるということがあるかも知れない。

宇宙とほかの任意の量子系との（この点に関しての）唯一の重要な違いは，ほかのどんな系も宇宙の外には存在しないことである。したがって宇宙の測定装置はその外には存在しえない。宇宙に対して可能な唯一の測定のしかたは宇宙の自己測定である。それは宇宙のある自由度が他の自由度に関する測定装置の役割をすると考えることである。宇宙の自己測定のモデルは Zeh (1986, 1988 b) と Kiefer (1987) によって考えられた。それは，物質と幾何の高次の多重極による，パラメーター a と φ(スケール因子とスカラー場) の測定である。

測定装置と測定される系の役割を同一の物質系の異なる自由度がするならば，ふつうの量子力学でも自己測定は可能である。実際，簡単でよく知られたシュテルン-ゲルラッハの実験さえ自己測定の例である。原子の磁気能率の成分が磁場における原子自身の軌道の曲がりから決められるときは，原子の磁気能率は測定される系であり，その重心は測定装置である。このように，シュテルン-ゲルラッハの実験では原子の自己測定が起こっている。

われわれは，量子連続測定に対する径路積分の方法を使って，スケール因子 a の連続測定（モニター）を考える。それは測定装置の具体的な記述を必要とせず，その代わりに，測定は量子系（いまの場合，宇宙）の状態についてそれが生じる情報によって特徴づけられる。技術的には，この方法は制限された径路の集合についての，あるいは，径路積分の測定に適当な重み汎関数を入れたすべての径路についての，径路積分の評価に帰着する。

簡単なミニ超空間モデルでの計算は量子宇宙の伝播子が，連続測定の中で，重要な時間依存性を獲得し，さらにある条件の下で，時間に依存するシュレーディンガー方程式をもみたすことを示す。時間に依存しないホイーラー-デヴィット動力学は，測定の影響が無視できるような，短い時間に対して成り立つことが分かる。

8.2 量子宇宙論における測定

径路積分法は量子場の測定を記述するのに使うことができる。量子重力における曲率の測定が，このようにして，重力場の配位についての汎関数積分を使って，Mensky (1985 a) によって行われた。この方法を量子宇宙論に応用しよう。

量子宇宙の動力学を記述する振幅は次のように表わせる：[1]

$$U({}^3G'',\ {}^3G')=\int d\mu[{}^3G]\exp(iS[{}^3G])。 \tag{8.2}$$

ここで ${}^3G$ は宇宙のある時間切片（空間的な面）の 3 次元幾何であり

$$[{}^3G]=\{{}^3G(\tau)\,|\,\tau'\leq\tau\leq\tau''\},\ {}^3G(\tau')={}^3G',\ {}^3G(\tau'')={}^3G'' \tag{8.3}$$

は‘3 次元幾何の空間における径路’，すなわち，二つの時間切片の間の宇宙の 4 次元幾何の (3+1)-層状積み上げである。$S[{}^3G]$ は $[{}^3G]$ で表わされる 4 次元幾何に対応する重力の作用であり，$d\mu[{}^3G]$ はすべての 4 次元幾何の空間におけるゲージ不変な測度である。積分は境界条件 ${}^3G'$，${}^3G''$ を持つすべての 4 次元幾何にわたって行われる。(8.2) 式は純粋な重力に対するものであるが，物質と相互作用している重力に拡張するのは簡単である。しかし，ここではその拡張は必要がない。

振幅（伝播子）(8.2) は測定がないときの量子宇宙の動力学を記述する。これはホイーラー-デヴィット方程式 (8.1) をみたし，ハミルトニアン $\hat{H}$ は作用 $S[{}^3G]$ から得られる。したがって伝播子 (8.2) のパラメーター τ'，τ'' への依存性はトリビアルであって，それはそれらの任意性（非物理的性格）の帰結である。ここで間隔 $[\tau',\ \tau'']$ の間に幾何の連続測定が行われるとしよう。振幅は重み汎関数の導入によって変る：

$$U_{[{}^3g]}({}^3G'',\ {}^3G')=\int d[{}^3G]\,w_{[{}^3g]}[{}^3G]\exp(iS[{}^3G]) \tag{8.4}$$

$[{}^3g]$ は測定の結果を記述する 4 次元幾何を表わし，汎関数 $w_{[{}^3g]}$ はこの結果に含まれる現実の 4 次元幾何についての（すなわち，3 次元幾何の空間にお

[1] 以下，c，$\hbar$ と重力定数 $\varkappa$ を 1 とする自然単位を使う。

いて量子宇宙が伝播する径路についての）情報を表わす。つまり $w_{[^3G]}[^3g]$ は，幾何 $[^3G]$ が $[^3g]$ から遠ければ小さいかゼロであり，それらの幾何が互いに近ければ 1 に等しい（か近い）。

われわれが考えているアイデアは，パラメーター τ'，τ'' によって印し付けられる瞬間の間の物理的時間を幾何 $[^3g]$ から評価することができ，そして，伝播子 (8.4) が，事実，この物理的時間に重要なしかたで依存するだろうということである。それによって宇宙の時間発展のふつうの描像が導かれる。測定が動力学をあまり変えないとき，すなわち，積分 (8.2) に重要な寄与を与える 4 次元幾何に対して汎関数 $w_{[^3g]}$ が 1 に近いときに，伝播子の以前の形 (8.2) とホイーラー-デヴィットのトリビアルな時間依存性が成り立つはずである。

8.3　測定がないときのミニ超空間

Halliwell (1988) は

$$ds^2 = -\frac{N^2(\tau)}{q(\tau)}d\tau^2 + q(\tau)d\Omega_3{}^2 \tag{8.5}$$

の形の計量から生じるミニ超空間モデルに対して振幅 (8.2) を評価した。そのとき重力場は唯一のパラメーター q によって表わされ，それはスケール因子の 2 乗に等しい，

$$q = a^2。$$

ここで τ は宇宙の時間切片を数える任意のパラメーターであって，その変換には推移関数 N の対応する変換がともなう：

$$\begin{aligned} d\tau &\longrightarrow d\hat{\tau} = w(\tau)dt, \\ N(\tau) &\longrightarrow \hat{N}(\tau) = w^{-1}(\tau)N(\tau) \quad 。\end{aligned} \tag{8.6}$$

幾何 (8.5) に対応し変換 (8.6) の下で不変な時間 t が式 $dt = N(\tau)d\tau$ によって定義できる。宇宙の切片の対応する点の間の時空間隔に等しい‘物理的’時間は $dt_{phys} = q^{-1}dt = q^{-1}Nd\tau$ であることを注意しておこう。考察の一番最後

にこのパラメーターを使う。

計量(8.5)とアインシュタイン作用から生じるハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2}(-4p^2+\lambda q-1) \tag{8.7}$$

であり，ここで λ は宇宙定数である。このハミルトニアンによって定義される古典軌跡 $q^{\text{class}}(\tau)$ はハミルトニアン方程式

$$\dot{q}=N\{q,\ H\},\ \dot{p}=N\{p,\ H\},$$

いまの場合

$$\ddot{q}=2\lambda N^2, \qquad (8.8),$$

をみたす放物線である。さらに古典軌跡は拘束条件

$$H=0$$

をみたさなければならない。

ハミルトニアンの式(8.7)を(8.2)に入れ，ゴーストを使ってゲージ不変な測度をつくり，それからゲージを $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\tau=0$ にとりゴーストについて積分することによって，Halliwell (1988) は伝播子(8.2)に対して次の積分を得た：

$$U(q'',\ q')=(\tau''-\tau')\int \mathrm{d}[\Pi]\,\mathrm{d}[N]\,\mathrm{d}[p]\,\mathrm{d}[q]$$

$$\exp\left(\mathrm{i}\int_{\tau'}^{\tau''}\mathrm{d}\tau\,(p\dot{q}-NH+\Pi\dot{N})\right)\ 。$$

ここでNについての積分は同次境界条件を持つ座標についてと同じく行われ，Π は対応する運動量として積分される。Π について積分すると

$$U(q'',\ q')=(\tau''-\tau')\int \mathrm{d}[N]\,\delta[\dot{N}]\,\mathrm{d}[p]\,d[q]$$

$$\exp\left(\mathrm{i}\int_{\tau'}^{\tau''}\mathrm{d}t\,(p\dot{q}-NH)\right)$$

を得る。$[p]$ についての積分も行うことができて

$$U(q'',\ q')=(\tau''-\tau')\int \mathrm{d}[N]\,\delta[\dot{N}]\,\mathrm{d}[q]$$

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{8}\right]\int_{\tau}^{\tau''}\mathrm{d}\tau\left(\frac{\dot{q}^2}{N}+4N\lambda q-4N\right)\Bigg] \tag{8.9}$$

が得られる。

あとで積分(8.9)に測定を取り入れるのだが，まず，Halliwell (1988)の論文と同じく，修正されない形を考えよう。$[q]$についての積分は行うことができ，$[N]$についての積分は($\delta[\dot{N}]$によって)単一の数値Nについての積分に帰する(この可能性が生じたのはゲージ$\dot{N}=0$を選んで計算しているからである)。この数は被積分関数の中に$(\tau''-\tau')N$という形でだけ現われることがわかる。この形を

$$T=(\tau''-\tau')N$$

とすると

$$U(q'',\ q')=\int \mathrm{d}T G_T(q'',\ q') \tag{8.10}$$

が得られる。ここで

$$G_T(q'',\ q')=\frac{1}{\sqrt{8\pi \mathrm{i} T}}$$
$$\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{(q''-q')^2}{8T}-\frac{T}{2}-\frac{\lambda T(q'+q'')}{4}-\frac{\lambda^2 T^3}{24}\right)\right\}$$

である。この伝播子は，Tについての積分を$-\infty$から∞までとするとホイーラー-デヴィット方程式

$$\frac{1}{2}\left(4\frac{\partial^2}{\partial q''^2}+\lambda q''-1\right)U(q'',\ q')=0$$

の解であり，積分が0から∞までとするとこの式のグリーン関数

$$\frac{1}{2}\left(4\frac{\partial^2}{\partial q''^2}+\lambda q''-1\right)U(q'',\ q')=-\mathrm{i}\delta(q''-q')$$

であることが容易に証明できる。

8.4 測定されているミニ超空間

さて，宇宙の自己測定を考慮して，積分(8.9)を変更しよう。自己測定の物理的モデルは8.1節で簡単に論じたが，くわしくはZeh (1986，1988 b)とKiefer (1987)が研究している。ここでは径路積分法を使う。それは測定装置

の具体的なモデルなしに連続測定を扱うことができる。この方法の長所の一つは測定の実際の方式を知らずに測定の影響を考慮できることである（測定が与える情報だけを知ればよい）。宇宙ではどんな測定が（それが行われるとして）行われるかわれわれには正確には分からないのだから，このことは重要である。

このミニ超空間モデルでは幾何学は関数 $[q]$ と $[N]$ に依存する計量 (8.5) によって記述される。したがって自己測定とは関数 $[q]$ と $[N]$ の推定として対応するある関数 $[\varkappa]$ と $[\nu]$ が見出されるということである。測定は本当の関数 $[q]$ と $[N]$ がそれらの推定からある与えられた量（対応する測定誤差）以上は違わないことを保証する。それは汎関数

$$\begin{aligned} u_{[\kappa]}[q] &= \exp\left(-\frac{1}{\rho^2}\int_{\tau'}^{\tau''} d\tau N(\tau)(q-\varkappa)^2\right) \\ v_{[\nu]}[N] &= \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\int_{\tau'}^{\tau''} d\tau |N-\nu|\right) \end{aligned} \tag{8.11}$$

を使って表わすことできる。

汎関数 (8.11) を使うと伝播子は

$$\begin{aligned} & U_{[\kappa,\nu]}(q'', q') \\ &= (\tau''-\tau')\int d[N]\,\delta[\dot{N}]\,d[q]\exp\left[-\frac{i}{2}\int_{\tau'}^{\tau''} d\tau\left(\frac{\dot{q}^2}{4N}+N\lambda q-N\right)\right] \\ &\times\exp\left[-\int_{\tau'}^{\tau''} d\tau\left(\frac{|N-\nu|}{\sigma^2}+N\frac{(q-\varkappa)^2}{\rho^2}\right)\right] \end{aligned}$$

となる。$[N]$ についての積分は，$\delta[\dot{N}]$ によって，数 N についての積分になる。$[q]$ について積分するために，この関数を二つの関数の和にわける；$q=q_0+z$。ここで $z(\tau')=z(\tau'')=0$ であり，q_0 は次の式と境界条件をみたす：[2]

$$\ddot{q}_0=0,\quad q_0(\tau')=q',\quad q_0(\tau'')=q'' \quad 。$$

すると

$$U_{[\kappa,\nu]}(q'', q')=(\tau''-\tau')\int dN$$

[2] q_0 に対するこの式を使うほうが古典方程式 (8.8) を使うよりも便利だが，後者を使ってもよい。

$$\exp\left[-\int_{\tau'}^{\tau''}\mathrm{d}\tau\left(\frac{|N-\nu|}{\sigma^2}+\frac{\mathrm{i}}{8N}\dot{q}_0{}^2\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}N(\tau''-\tau')\right]$$
$$\times\int_0^0\mathrm{d}[z]\exp\left[-\mathrm{i}\int_{\tau'}^{\tau''}\mathrm{d}\tau\left(\frac{\dot{z}^2}{8N}+\frac{1}{2}\lambda Nz-\mathrm{i}N\frac{(z-\varkappa+q_0)^2}{\rho^2}\right)\right] 。$$

$[z]$ についての積分はスペクトル表現，すなわち，

$$z(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}z_k\sin\Omega_k(\tau-\tau'),$$
$$z_k=\frac{2}{\tau''-\tau'}\int_{\tau'}^{\tau''}\mathrm{d}\tau z(\tau)\sin\Omega_k(\tau-\tau') \tag{8.12}$$
$$\Omega_k=\frac{k\pi}{\tau''-\tau'},$$

で定義される変数 z_1，z_2，……についての積分（第 3 章の 3.3 節を見よ）に変換することによって行える。

その結果は

$$U_{[\kappa,\nu]}(q'',\ q')=\int\mathrm{d}TW(T/\rho)\Sigma_T[\nu]R_T[\varkappa]G_T(q'',\ q') \tag{8.13}$$

となる。ここで関数

$$W^2(x)=\frac{2(1+\mathrm{i})x}{\sin[2(1+\mathrm{i})x]}$$

と汎関数

$$\Sigma_T[\nu]=\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\int_{\tau'}^{\tau''}\mathrm{d}\tau\left|\nu(\tau)-\frac{T}{\tau''-\tau'}\right|\right)$$
$$R_T[\varkappa]=\exp\left(-\frac{T}{2\rho^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varkappa_k-q_{Tk})^2}{1-8\mathrm{i}\left(\dfrac{T}{\pi k\rho}\right)^2}\right)$$

を導入した。

これらの汎関数は関数 $\varkappa(\tau)$ と推移関数 $N=T/(\tau''-\tau')$ をもつ古典運動方程式 (8.8)

$$\ddot{q}_T=\frac{2\lambda T^2}{(\tau''-\tau')^2},\quad q_T(\tau')=q',\quad q_T(\tau'')=q''$$

の解 $q_T(\tau)$ との (8.12) の型の級数に分解した項 $\varkappa_k$，q_{Tk} で表わされている。関数 $q_T(\tau)$ は拘束条件 $H=0$ をみたさないから一般には古典軌跡ではない

ことに注意しよう。この拘束条件がみたされるためにはTは次の T_+ または T_- に等しくなければならない：

$$T_\pm=\lambda^{-1/2}(Q'^2+Q''^2\pm2Q'Q''),\quad Q''^2=q''-\lambda^{-1},\quad Q'^2=q'-\lambda^{-1}\quad 。$$

8.5 結果の分析

自己測定をしているミニ超空間の動力学を記述する伝播子(8.13)は(8.10)とは被積分関数の三つの因子，W，Σ_T，および R_T，が違う。これらの因子とその役割を調べよう。われわれの目的は，これらの因子が小さくなく測定振幅が最大に近いような条件を探すことである。

関数 $W(x)$ は $|x|\lesssim1/2$ のとき近似的に1である。$W(x)$ の絶対値は一様に減少し，$|x|>2$ のときは1/2より小さくなり，それから非常に早く(指数関数的に)減少する。これらの性質はさらに解析するために重要である。

汎関数 Σ_T は幾何の測定の結果を(関数 $[\varkappa]$ とともに)記述する可能ないろいろな関数 $[\nu]$ の分布を特徴づける。関数 $[\nu]$ がほとんど一定のときに限って，Tのある値に対して $\Sigma_T[\nu]$ が1に近いことが可能であることは容易に見てとれる。それ以外のときは，Σ_T はずっと小さくて対応する測定データの確率は小さい。これはゲージ条件 $\dot{N}=0$ を採用した結果である。

ここから先の分析では ν=一定とする。すると

$$\Sigma_T(\nu)=\Sigma(T-t)=\exp\left(-\frac{|T-t|}{\sigma^2}\right) \tag{8.14}$$

となる。ここで記号

$$t=(\tau''-\tau')\nu$$

を導入した。ν は推移関数の推定値だから， t は明らかに間隔 $[\tau',\ \tau'']$ の現実の(ゲージ不変な)持続の推定値である。こうして物理的に意味のある時間がわれわれの分析に現われ，(8.13)は

$$U_{[\kappa],t}(q'',\ q')=\int\mathrm{d}T\,W(T/\rho)\,\Sigma(T-t)\,R_T[\varkappa]\,G_T(q'',\ q') \tag{8.15}$$

となる。

(8.15)の汎関数 R_T はスケール因子 $[q]$ の2乗を推定するいろいろな関数 $[x]$ の分布を特徴づける。この汎関数について一般的な概念を得るために指数の分母の虚数項を無視しよう。この項は $[q]$ の測定における量子効果を表わすので，一般には無視できない。それが無視できるのは

$$t \leq 1, \quad \sigma^2 \leq \rho$$

のときである。けれども汎関数 $R_T[x]$ の性格は，パラメーターのそれ以外の値に対しても，量子効果を抜きにして推定することができる。この項を無視して((8.14)によって) $T=t$ とすると

$$R_t[x] \simeq R_t{}^0[x] = \exp\left(-\frac{t}{2\rho^2}\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - q_{tk})^2\right)$$

を得る。パーシヴァルの公式によって，これは，$q_t = q_t(\tau)$ として，

$$R_t{}^0[x] = \exp\left(-\frac{t}{\rho^2(\tau''-\tau')}\int_{\tau'}^{\tau''}\mathrm{d}\tau(x-q_t)^2\right)$$

に等しい。

これは，大きな確率をもつ測定結果 $[x]$ は放物線

$$q_t(\tau) = \lambda t^2\left(\frac{\tau-\tau'}{\tau''-\tau'}\right)^2 + [(q''-q') - \lambda t^2]\frac{\tau-\tau'}{\tau''-\tau'} + q'$$

に近いはずである(伝播子は，それ以外では，指数関数的に小さくなる)ことを意味する。関数 $[x]$ を固定し q'，q'' を変えて $R_t[x]$ を考えると，これらの点は，予想されるように，測定されたスケール因子 $[x]$ の対応する端点のまわりに局在していることが分かる。もっと正確にいえば，それらは，$q_t(\tau)$ に代入したときに $R_t[x]$ を最大にするような放物線 $\bar{q}_t(\tau)$ の対応する端点 $\bar{q}'$，$\bar{q}''$ のまわりに局在する。

q'，q'' が対応する点 $\bar{q}'$，$\bar{q}''$ に十分に近いとしよう。そのとき(8.15)の $R_T[x]$ は1としてよい。伝播子の，他の因子による，q'，q'' および t への依存性を調べよう。この場合の伝播子は

$$U_{[\kappa],t}(q'', q') = \int \mathrm{d}T\, W(T/\rho)\,\Sigma(T-t)\,G_T(q'', q') \tag{8.16}$$

の形をとる。

t を固定したとき，(8.14) で定義される関数 $\Sigma(T-t)$ は T が t に近いとき大きく，T が t から σ^2 以上離れると指数関数的に小さくなる。σ が小さいとき，(8.16) の関数 $\Sigma(T-t)$ は近似的に δ 関数でおきかえられる：

$$\Sigma(T-t) \simeq 2\sigma^2 \delta(T-t)$$

これは T が t から σ^2 の程度離れたときに (8.16) の被積分関数の中のほかのすべての因子を一定と考えてもよいときに可能である。これは

$$\sigma \ll 1,\ \lambda\sigma^2 q' \ll 8,\ \lambda\sigma^2 q'' \ll 8,\ t \ll \rho,\ \frac{\sigma|q''-q'|}{2\sqrt{2}} \ll t \ll \frac{2\sqrt{2}}{\lambda\sigma} \tag{8.17}$$

ならば成り立つ。そのとき伝播子は

$$U_t(q'',\ q') = 2\sigma^2 G_t(q'',\ q') \tag{8.18}$$

となる。

この伝播子は方程式

$$\frac{1}{2}\left(4\frac{\partial^2}{\partial q''^2} + \lambda q'' - 1\right) U_t(q'',\ t') = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} U_t(q'',\ q') \tag{8.19}$$

をみたすことが容易に示せる。(8.7) によってこの式は

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} U_t(q'',\ q') = \hat{H} U_t(q'',\ q') \tag{8.20}$$

と書き直せる。したがって，不等式 (8.17) がみたされるならば，測定の結果としてあらわれる宇宙の波動関数の時間 t への依存性は時間に依存するシュレーディンガー方程式によって記述される。しかしそのための条件 (8.17) が現実にはみたされていないことはあり得る。

σ が大きい逆の極限を考えよう。次の不等式が成り立つとする：

$$\rho^2 \gg 1,\ \sigma^2 \gg 1,\ t \ll \sigma^2,\ q' \ll \lambda^{-1},\ q'' \ll \lambda^{-1}。\tag{8.21}$$

すると関数 $\Sigma(T-t)$ と $W(T/\rho)$ は，積分に対して重要なすべての T の値に対して（すなわち，因子 $\exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}T\right)$ の振動を無視できる領域において），1 に等しい。したがって伝播子 (8.16) は，この条件の下では，ハリウエルの伝播子 (8.10) に等しくなり，ホイーラー-デヴィット方程式をみたす。

(8.21) からハリウエルの伝播子 (8.10) が十分によい近似であるのは十分に短い時間 ($t \ll \sigma^2$) とあまり正確でない自己測定 ($\rho \gg 1$, $\sigma \gg 1$) に対してだけであることがわかる。時間 t が臨界値 σ^2 よりも大きいと，自己測定の影響が無視できなくなり，伝播子のもっと一般の形，(8.16) あるいは (8.15)，を使わなければならない。しかし，時間が短くて $t \ll \sigma^2$ であっても，自己測定が正確で $\rho \leqq 1$ あるいは $\sigma \leqq 1$ であると，ホイーラー-デヴィット方程式は適用できない。われわれは現実の精度を知らない。この問題はいま扱っている現象論的なやり方では答えることができず，Zeh (1986, 1988 b) と Kiefer (1987) が考えたような自己測定の物理的モデルを必要とする。

測定間隔の持続を表わすためにいままで使ってきたパラメーター $t=(\tau''-\tau')\nu$ は時空間隔の長さではない。計量 (8.5) から，時空間隔に一致する物理的あるいはむしろ幾何学的時間 (固有時) は

$$t_{phys} \simeq \frac{t}{a}, \quad a^2 \simeq \varkappa$$

として導入できることが分かる。(8.14) 式からこの時間の測定誤差は

$$\Delta t_{phys} \simeq \frac{\sigma^2}{a}$$

であることが分かる。同様に，(8.14) を使って (8.15) 式からスケール因子 a の測定誤差は

$$\Delta a \simeq \frac{\rho}{2at^{1/2}}$$

であることが分かる。

この物理的にいっそう見通しのよいパラメーターを使うとハリウェルの伝播子が成り立つ条件 (8.21) は

$$t_{phys} \ll \Delta t_{phys}, \quad 4a^3 t_{phys} \Delta a^2 \gg L^6, \quad a\Delta t_{phys} \gg L^2, \quad \lambda a^2 \ll 1 \tag{8.22}$$

となる。ここでは，ふつうの単位 (ただし $c=1$) を使い

$$L=\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \simeq 10^{-33}\,\mathrm{cm}$$

はプランク長さである。伝播子が簡単な形(8.18)を持ちシュレーディンガー方程式をみたすための条件(8.17)は，そのとき，

$$a\Delta t_{phys} \ll L^2,\ \ \lambda a^3 \Delta t_{phys} \ll L^2,$$
$$\frac{a^{3/2}\Delta t_{phys}{}^{1/2}}{3L} \ll t_{phys} \ll \frac{3L}{\lambda a^{3/2}\Delta t_{phys}{}^{1/2}} \qquad (8.23)$$

となる。

最後に二つの注意をしておこう。

注意　1　考察の過程で現われた放物線 $q_t(\tau)$ はハミルトニアン(8.7)から導かれる運動方程式(8.8)をみたすが，一般には拘束条件 $H=0$ はみたさない。この拘束条件は量子伝播子(8.13)の形に，すなわち，関数 $G_T(q'', q')$ の(Tについての)振動が値 $T=T_\pm$ の近くで極小であることに由来する。これによって $T_\pm$ 以外の t に対するほうが伝播子 $U_\pm(q'', q')$ は小さい。しかし σ^2 が十分に小さければ $G_T(q'', q')$ の振動はあまり重要でなくなる。例えば，それはシュレーディンガー領域(8.17)では重要ではない。したがって時間的な方向での宇宙の幾何の十分に精密な測定は古典拘束条件 $H=0$ をなくしてしまう。この場合宇宙は非古典的なシナリオに従って発展しうる。一つの例は考えているミニ超空間モデルで $\lambda=0$ と選ぶことであって，古典軌跡は現実には存在しないが，測定の下での発展は可能である。

注意　2　ここまで，変数 $q=a^2$ が不等式 $q\geqq 0$ によって制限されることによって生じる問題を考えなかった。これは $q=0$ である境界条件を要求する。その条件は，例えば，鏡像の方法で考えることができる(この方法とほかの方法については Halliwell 1988 を見よ)。$q=0$ での境界条件を考慮すると伝播子の形(8.13)は q', q'' が小さいとき変更を受ける。しかし，時間の発生についてここまでに導いた結論は，ここでの解析の主な点とともに，もちろん成り立つ。

8.6　まとめと注意

われわれは量子宇宙の動力学への自己測定の可能な影響を考えた。その影響は連続測定の過程の中での宇宙の波動関数の収縮によって生じ得る。この種の収縮は量子測定の径路積分による扱いの中で自然に考慮される。明瞭さを保つために，実際の計算は Halliwell (1988) の論文の中で (測定なしに) 考えられた簡単なミニ超空間モデルで行われた。スケール因子と推移関数で記述される幾何の測定によって宇宙の二つの空間的な切片の間の間隔の測定として時間が自然に現われることが示された。したがって，自己測定を正しく考慮すれば，量子宇宙の時間発展は量子宇宙論において意味を持っている。

これは，量子系の完全な記述はその連続測定を含まねばならないという一般的命題の一つの例証 (おそらくはもっともエクサイティングな) である (第 4 章の 4.3 節をも見よ)。

注意　3　測定は，古典的な範囲で行われるならば，系の動力学には影響しない。このことは第 4，5 章で論じた (第 9，11 章をも見よ)。これに関連する興味ある議論が Gell-Mann and Hartle (1990) の論文にある。そこでは‘測定の古典領域’という言葉の代わりに，‘歴史の非干渉化しつつある集合’という概念が使われている。彼らは，事実，測定をまったく考えていない。しかし古典領域における測定は状態の収縮を生じない。したがって，径路の非干渉化しつつある集合による系の記述と古典領域における測定の考察とは本質的に同じことである。

以上の考察は，量子宇宙がハリウエルの伝播子 (8.10) によって (すなわち，ホイーラー-デヴィット方程式 (8.1) によって) 記述できるのは自己測定の影響を無視できる十分に短い時間, (8.21), に対してだけであることを示す。もっと長い時間に対しては，宇宙の自己測定を考慮に入れたもっと一般的な伝播子 (8.15) を使わなくてはならない。この領域は時間についての重要な依存性によって特徴づけられる。(現実に成り立つには，おそら

く，きびし過ぎる）ある条件(8.17)の下では，この時間に依存する伝播子は簡単な形(8.18)をとり，時間に依存するシュレーディンガー方程式(8.20)をみたす。

パラメーター σ および ρ の実際の値について，あるいはもっと一般的には，量子宇宙の自己測定の現実の方式について，重要な問題が明らかに生じる。この問題はこの現象論的な方法の枠内では考えることはできない。それは自己測定の物理的モデルの研究を必要とする。そのようなモデルの一つの例は Zeh (1986, 1988 b) および Kiefer (1987) の論文にある。

9. 作用不確定性原理

連続測定の量子論の径路積分による取り扱いをここまでの章で展開した。この方法によれば，いろいろな測定データの確率を決定する測定振幅は制限された径路積分(‘有限な限界の中の’径路積分)の形で評価できる。測定振幅を使って，古典論によって予言されるものからの測定データの最大のズレが容易に決定される。この章の目的はこのズレ，すなわちデータの変動，を(作用不確定性原理，AUP，と呼ばれる)特定の型の不確定性原理という，もっと簡単で見通しのよい形で表わすことである。

AUP のもっとも簡単な(しかし弱い)形は，S を作用汎関数として，$\delta S \gtrsim \hbar$ である。(量子領域で行われる理想的な測定に対する) AUP のもっとも強い(より広い応用を持つ)形は $\left| \int_{t'}^{t''} \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \Delta q(t)\, dt \right| \simeq \hbar$ である。ここで径路 $[q]$ と $[\Delta q]$ は，それぞれ，測定データと測定誤差に対するものである。これはシンボリックに δ(方程式)Δ(径路)$\simeq \hbar$ と表わしてもよい。その意味は，観測された(測定された)運動の古典運動方程式に従う運動からのズレが径路の不確定(この不確定は測定誤差から生じる)に反比例する，ということである。

AUP の帰結は，測定精度を量子領域の閾(シキイ)値を越えて改良すると測定から得られる情報は少くなるということである。量子力学と量子重力における連続測定に AUP を適用した例を以下で述べる。量子重力の場合，曲率の測定可能性に関するローゼンフェルトの制限が AUP からほとんど自明のものとして導かれる。

9.1 連続測定における不確定

ここまでの章で量子連続測定にファインマンの径路積方形式が応用され，自然で効果的であることが証明された。連続測定のそれぞれのデータ α に対する振幅 U_α は，$P_\alpha=|U_\alpha|^2$ が測定のいろいろなデータに対する確率密度となるように，径路積分の形で表わされる。もっとも確率が高いのは，もちろん，古典論が予言するデータ $\alpha_{\rm class}$ である。しかし，データ α は古典論の $\alpha_{\rm class}$ からズレる可能性がある。生じ得るデータの $\alpha_{\rm class}$ のまわりの変動 $\delta\alpha$ は理論のもっとも重要な予言の一つである。いうまでもなく，データの変動 $\delta\alpha$ は測定の誤差 $\Delta\alpha$ による。

(事態を部分的に単純化すると) 量子閾値 $\Delta\alpha_{\rm quant}$ があって，粗い測定 ($\Delta\alpha\gg\Delta\alpha_{\rm quant}$) に対しては古典測定領域が生じ，精密な測定 ($\Delta\alpha\ll\Delta\alpha_{\rm quant}$) に対しては量子領域が生じることが分かる。古典領域では $\delta\alpha\simeq\Delta\alpha$ であって，測定データの変動は測定の誤差によって完全に決まる。しかし，量子領域では $\delta\alpha\simeq\Delta\alpha^2{}_{\rm quant}/\Delta\alpha$ である。この場合，データの変動は量子揺動の (すなわち，測定装置の測定される量子系への不可避の反作用の) 帰結である。この‘量子測定雑音’は，測定誤差 $\Delta\alpha$ が減ると，増大する。このパラドキシカルな現象が，測定誤差 $\Delta\alpha$ を量子閾値 $\Delta\alpha_{\rm quant}$ 以下に減らしても意味がないことの理由である。測定の最適領域は古典領域と量子領域との境界，$\Delta\alpha\simeq\Delta\alpha_{\rm quant}$，にある。この領域ではデータの変動 $\delta\alpha$ は最小であって，$\delta\alpha_{opt}\simeq\Delta\alpha_{\rm quant}$ に等しい。これが与えられた型の測定に対する絶対限界である。

いうまでもなく前のパラグラフの図式は一つの測定から別の測定へと変化する複雑な現実の状況の大ざっぱな定性的なアウトラインに過ぎない。この粗い図式に要求される二つの主な補正は以下のものである：(1) 量子閾値 $\Delta\alpha_{\rm quant}$ と古典および量子測定領域は測定過程のそれぞれの振動数領域に対して，あるいは考えている系に対して働く与えられた型の力に対して，別々に決めなければならない；(2) 量子非破壊 (QND) 測定と呼ばれる，量子閾値をまったく持たない型の測定がある。QND 測定は，事実，いつまでも古典領

域において行われる(第6章とこの章の9.6節を見よ)。

任意の連続測定は，すべての測定データ α に対して測定振幅 U_α が評価されれば，完全に解析できる。しかしこれは径路積分の計算を必要とする。この章の目的は，Mensky の論文(1991，1992 a，b，1993)に従って，そのような解析の別のもっと簡単な形を与えることである。測定データの変動 $\delta\alpha$ は作用汎関数 S を含む簡単な不等式 $\delta S \gtrsim \hbar$ をみたすことが分かる。この不等式は多くの点でよく知られた不確定性原理に似ている。このことがそれを‘作用不確定性原理’と呼んでよい理由である。

(もっと広い適用領域を持つ) AUP のもっと強い形を線形の系に対して(例えば振動数成分への)線形分解によって導くことができる。それは等式

$$\left|\int_{t'}^{t''} \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \Delta q(t)\, dt\right| \simeq \hbar$$

として書くことができ，量子領域で行われる理想的な測定に対して成り立つ。

9.2 測定の古典領域

量子連続測定に対する径路積分法に導く議論を簡単にくり返えそう。系(例えば粒子を考えてよい)が点 q' から点 q'' へ動くことに対する振幅(**伝播子**と呼ぶ) $U(q'', q')$ は点 q' と q''を結ぶ可能な径路

$$[q]=\{q(t) \mid t' \leqq t \leqq t''\}$$

のすべてに対応する振幅 $U[q]$ の和(というよりは積分)の形

$$U(q'', q')=\int \mathrm{d}[q]\, U[q] \tag{9.1}$$

に表わすことができる。しかし伝播子に対するこの表現が成り立つのは，q' から q'' への移行のチャネルとしてどの径路を本当に通ったかを知ることが不可能な場合だけである。ここで，この移行にともなって**連続測定**が同時に行われ，移行の径路についてある情報を与えるとしよう。そのような情報は径路のある集合 I_α で表わされる。測定が結果 α を与えるならば，移行は集合

I_α に属する径路 $[q]$ の一つを通じて起こる。そのとき q' から q'' への移行の振幅は I_α に属する径路についての積分として表わされる：

$$U_\alpha(q'',\ q')=\int_{I_\alpha} U[q]\mathrm{d}[q] \quad 。 \tag{9.2}$$

ハイゼンベルクの不確定性原理 $\Delta q\Delta p \gtrsim \hbar$ は瞬間的な量子測定の特徴を表わすには便利だが，連続測定に対しては不便である。例えば測定が座標 q のある誤差 Δq でのモニターであるとすれば，それは運動量についてもある情報を与えるが，この情報を定量的に表わして連続測定の有効性への制限を導くために不確定性原理を応用することは難しい。

したがって連続測定に対する不確定性原理のような形の制限を得る試みは自然である。すべての場合にそれらの制限は (9.2) 式のような径路積分から導かれる。そのような計算の一般的な性質を分析し，連続測定に対する不確定性原理を定式化することを試みよう。

別々の径路に対応する振幅 $U[q]$ は，ファインマンに従えば，

$$U[q]=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]}$$

であって，$S[q]$ は考えている系に対する作用汎関数である。したがって径路積分 (9.2) は次のよう書き直される：

$$U_\alpha=\int_\alpha \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]}\mathrm{d}[q] \quad 。 \tag{9.3}$$

ここでは引数 q', q'' を省略し，測定の結果 α を対応する径路の集合 I_α と同一とした。この章の中では α を I_α と同じとする。

U_α の値は測定が α いう結果を与えるための振幅と解釈できる。これは，U_α の絶対値が大きい測定結果だけが確率が大きいことを意味する。作用汎関数 $S[q]$ の振舞いを分析することによってこの値を確定する。

以下ではすべての集合 α が同じ‘幅’を持ち，ただその形が違うだけとする。すると U_α の値は，$[q]$ が α の限界内にあるときに，$S[q]$ がどんなに速く変化するかにだけよる。

注意 1 これは,

$$d[q]=\prod_t dq(t)$$

によって計算される集合 α の'測度'がすべての α に対して同じであって, U_α は $[q]\in\alpha$ であるときの因子 $\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right)$ の振動にだけによる, という考えである。'測度' $d[q]$ についての主張は極限過程の助けを借りて意味づけられる。もっと正確な定式は, 測度 $d[q]$ が時間について局所的な変位の群 G (第10章を見よ),

$$g=\{c(t)\,|\,t'\leqq t\leqq t''\},\quad g[q]=\{q(t)+c(t)\,|\,t'\leqq t\leqq t''\}$$

について不変であって, すべての集合 α は, 異なる $g\in G$ と同じ α_0 によって $\alpha=g\alpha_0$ の形に表わせるということである。

制限されないファインマン積分

$$U(q'',\ q')=\int e^{\frac{i}{\hbar}S[q]}d[q] \tag{9.4}$$

にはある意味で古典軌跡に近い径路だけが寄与することが知られている。

これは作用汎関数 $S[q]$ が古典軌跡 $[q_{\mathrm{class}}]$ において極値をとるからである:

$$\left.\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)}\right|_{[q]=[q_{\mathrm{class}}]}=0 \quad 。$$

$S[q]$ は $[q_{\mathrm{class}}]$ の近くでゆっくりと変り, すべての部分振幅 $U[q]=\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right)$ がこの近傍でほとんど同じ位相を持つので'強め合う干渉'が生じる。

強め合う干渉は集合

$$I_{\mathrm{class}}=\{[q]\,|\,|S[q]-S[q_{caass}]|\lesssim\hbar\}$$

の範囲内で起こり, この集合の外では振動が速くなるので'弱め合う干渉'に変る。したがって, ファインマンの径路積分への主な寄与は径路の集合 I_{class} によって与えられる:

$$U(q'',\ q')\simeq\int_{I\ \mathrm{class}}\mathrm{d}[q]\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]}\quad。$$

(同様の議論によって) 測定振幅 (9.3) が $\alpha=\alpha_{\mathrm{class}}$ に対して最大値を持つことは明らかである。α_{class} は古典軌跡をその中心の径路として含んでいる。

注意 2 この主張は先に述べた時間について局所的な変位の群 G によって厳密にすることができる。この群を使えば $\alpha_{\mathrm{class}}=V[q_{\mathrm{class}}]$ であり，部分集合 $V\subset G$ は単位元について対称，つまり任意の元 g とともに g^{-1} を含んでいる。

測定の古典領域は

$$\alpha_{\mathrm{class}}\supset I_{\mathrm{class}} \tag{9.5}$$

という要求によって定義される。この場合積分 $U_{\alpha\mathrm{class}}$ は，事実上，完全なファインマン積分 U に等しい。U_α が $\alpha\supset I_{\mathrm{class}}$ に対しては同じに留まることは明らかである。しかし，交わり $\alpha\cap I_{\mathrm{class}}$ が小さくなるとき U_α は減少し，$\alpha\cap I_{\mathrm{class}}=\emptyset$ に対してはほとんどゼロになる。その理由は，この場合，集合 α のすべての領域で振幅 $U[q]$ が速く振動するからである。

前のパラグラフの議論から，古典領域 (9.5) で行われる測定のデータの中で確率の高いものは

$$[q_{\mathrm{class}}]\in\alpha \tag{9.6}$$

という条件によって特徴づけられることが分かる。この条件によって I_{class} を含むかあるいは I_{class} との交わりが大きい集合が選び出される。この条件によって排除される集合は I_{class} との交わりが小さいかゼロであるものだけである。

条件 (9.6) は，測定の古典領域の場合に期待されるように，古典測定理論の結論と完全に一致する。実際，古典測定理論のすべての予言は古典領域において行われる連続測定に対して成り立つ。

古典測定領域の場合にはかなり高い確率で生じる測定データ α は，どれ

も，集合 I_{class} またはその大部分を含む（ここでは，いうまでもなく，測定データ α を対応する径路の集合と解している）ということは，作用不確定性原理を導くために重要である。すると，I_{class} の定義から，（確率の高い測定データに対応する）集合 α の限界の中で作用 S の変動が作用量子より小さくない：

$$\Delta_\alpha S \gtrsim \hbar$$

ということが出る。これは次の節で使われる。

9.3　量子領域と AUP

どの集合 α も I_{class} を含まないような測定の量子領域を考える。この場合もっとも確率が高いのは I_{class} の中心にある集合 α_{class} に対応するデータである。しかし，ほかの集合 α も，その集合の限界の中での作用の変動が十分小さく，$\Delta_\alpha S \lesssim \hbar$ であれば，起こりうる。したがって，高い確率を持つ測定データ α のあるものに対しては，S の変動は前の不等式で特徴づけられる領域の境界，$\Delta_\alpha S \simeq \hbar$ にある。可能性の高い（高い確率で生じる）集合 α のすべてをとって，そのすべてに対して S の変動 δS を推定することにより，この変動に対して $\delta S \gtrsim \hbar$ を得る。

この結論は測定の量子領域に対して導かれる。ところが古典領域においては，すべての起こりうる測定データ α に対して $\Delta_\alpha S \gtrsim \hbar$ である。したがって，かなり高い確率をもって起こる測定データに対しては，S の変動 δS はどの測定領域においても不等式

$$\delta S \gtrsim \hbar \tag{9.7}$$

をみたすことが結論される。

これは**作用不確定性原理**，AUP，のもっとも簡単な形である。しかし，これはあまりに弱いことが分かる（われわれはそれを 9.7 節で量子重力場の測定に適用するけれども）。AUP を表わすもっと強い不等式が線形の系の場合に導かれる（それは，集合 α が十分狭ければ，非線形の系に対しても成り立

つ)。

線形の系の場合には運動のある線形の分解の異なる成分を別々に分析することができる。与えられた測定に対してそれらの成分のあるものは古典領域で他の成分は(同じ測定によって)量子領域で測定されることが起こりうる。

はっきりさせるために，振動数成分の級数への分解を考えよう。連続測定は径路$[q]$のそれぞれの振動数成分について情報を与える。したがってその測定は多数の測定から成り，その各々は一定の振動数成分 q_Ω を測定すると考えることができる。典型的な状況はある振動数成分 q_Ω が古典領域で測定され($a_\Omega \supset I_\Omega^{class}$)，他の成分は量子領域で測定されるときである。

考えている系が線形，すなわち，ラグランジアン $L(q,\ \dot{q})$ と作用 $S[q]$ が2次であるとしよう。すると，径路$[q]$を振動数 Ω と振幅 q_Ω をもつ振動数成分に展開したとき，作用もまた

$$S[q]=\sum_\Omega S_\Omega[q_\Omega]$$

と展開される。径路についての積分の測度は次のように分解される(第3章の3.3節を見よ)：

$$\mathrm{d}[q]=\prod_\Omega \mathrm{d}q_\Omega \quad 。$$

その結果，積分(9.4)は次のように分解される：

$$U=\prod_\Omega U_\Omega,\quad U_\Omega=\int \mathrm{d}q_\Omega e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_\Omega(q_\Omega)} \quad 。$$

径路$[q]$を径路の集合 α の内部に制限することは振動数成分によっても表わせる(そうでなければ別の線形展開を採用する)，

$$q_\Omega \in \Delta_\Omega(a_\Omega)=[a_\Omega-\Delta a_\Omega,\ a_\Omega+\Delta a_\Omega],$$

ここでは振動数成分の間隔 Δ_Ω の集合が測定データ α を決定する。

制限された積分(9.2)はそのとき次の分解された形をとる：

$$U_\alpha=\prod_\Omega U_\Omega(a_\Omega),\quad U_\Omega(a_\Omega)=\int_{\Delta_\Omega(a_\Omega)} \mathrm{d}q_\Omega e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_\Omega(q_\Omega)} \quad 。 \tag{9.8}$$

この式では測定は振動数成分の測定と解釈される。振動数成分 q_Ω の測定データは a_Ω であり，この測定の誤差は Δa_Ω で表わされている。間隔 $\Delta_\Omega(a_\Omega)$

はペア $(a_\Omega, \varDelta a_\Omega)$ と同等である。

もっとも確率が高いのは古典径路 q_{class} に対する展開を成す古典データ $a_\Omega{}^{class}$ である。それは $U_\Omega(a_\Omega)$ の絶対値が $a_\Omega = a_\Omega{}^{class}$ に対して最大値を持つことを意味する。これは，部分作用 $S_\Omega(q_\Omega)$ が $q_\Omega = a_\Omega{}^{class}$ において極値をとり，(9.8) の被積分関数の振動がこの点で極小だからである。

$$I_\Omega{}^{class} = \{q_\Omega \,|\, |S_\Omega(q_\Omega) - S_\Omega(a_\Omega{}^{class})| \lesssim \hbar\}$$

と書くことにすると，Ω-測定の古典領域は

$$\varDelta_\Omega(a_\Omega{}^{class}) \supset I_\Omega{}^{class}$$

によって定義され，それ以外は量子領域となる。古典領域では $a_\Omega{}^{class} \in \varDelta_\Omega(a_\Omega)$ であるような a_Ω の確率が高い。この条件は，$\varDelta_\Omega(a_\Omega)$ は α の振動数成分だから，$a_\Omega{}^{class} \in \alpha$ と書くこともできる。

Ω-成分の測定の量子領域，$\varDelta_\Omega(a_\Omega{}^{class})$ が $I_\Omega{}^{class}$ よりも狭いとき，を考えよう。この場合 $\varDelta_\Omega(a_\Omega{}^{class})$ の限界の中での S_Ω の変動 $\varDelta S_\Omega$ は $\hbar$ より小さい。したがって $\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_\Omega(q_\Omega)\right)$ はほとんど一定であり，もっとも確率の高いデータ $a_\Omega{}^{class}$ の振幅は積分領域の測度に近似的に等しい：

$$|U_\Omega(a_\Omega{}^{class})| \simeq \varDelta a_\Omega \quad 。 \tag{9.9}$$

$a_\Omega{}^{class}$ と違う別の測定データ a_Ω に移ると，$\varDelta_\Omega$ の限界の中で指数の振動が小さい間は部分測定振幅 U_Ω は一定に留まることが分かる。そのための条件は

$$|\varDelta S_\Omega| \lesssim \hbar$$

が，$\varDelta_\Omega$ の限界の中の任意の q_Ω に対する

$$\varDelta S_\Omega = S_\Omega(q_\Omega) - S_\Omega(a_\Omega)$$

に対して，成り立つことである。

この条件を Ω について加えると測定データ α の確率が高いための条件

$$|\textstyle\sum \varDelta S_\Omega| \lesssim \hbar$$

が与えられる。ここで和は $a_\Omega \neq a_\Omega{}^{class}$ であるような Ω に対してだけ行われる。

和の中の項は $\varDelta q_\Omega = q_\Omega - a_\Omega$ として

$$\left.\frac{\partial S_\Omega(q_\Omega)}{\partial q_\Omega}\right|_{q_\Omega=a_\Omega} \Delta q_\Omega$$

と書ける。この表現は $a_\Omega=a_\Omega{}^{class}$ のとき自動的にゼロになるから，上の式の和をすべての Ω ついての和にできるという利点がある：

$$\left|\sum_\Omega \left.\frac{\partial S_\Omega(q_\Omega)}{\partial q_\Omega}\right|_{q_\Omega=a_\Omega} \Delta q_\Omega\right| \lesssim \hbar \quad 。 \tag{9.10}$$

ここでのズレ Δq_Ω は任意であるが，$a_\Omega+\Delta q_\Omega$ を $\Delta_\Omega(a_\Omega)$ から推し出さないものである。ズレをその範囲でどのようにとってもこの不等式が成り立てば，データ α の確率は高い。

9.4 AUP と運動方程式

振動数成分から径路自身に戻ると，条件 (9.10) を積分の形に書くことができる：

$$\left|\int_{t'}^{t''} \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \Delta q(t)\,\mathrm{d}t\right| \lesssim \hbar \quad 。 \tag{9.11}$$

ここで $[q]$ は径路の集合 α の中心の径路であり，$[\Delta q]$ はそれを α から推し出さないような，すなわち $[q+\Delta q]\in\alpha$ であるような，$[q]$ のズレである。与えられた集合 α と α から推し出さないような任意のズレ $[\Delta q]$ に対して不等式 (9.11) がみたされるならば，その測定データ α は高い確率で生じる。

(9.11) 式はデータ α の確率が高いための条件だから，(9.11) 式の左辺が $\hbar$ の程度であるような，確率の高いあるデータ α が存在する。したがって量子領域で行われる測定の確率の高いデータに対して

$$\left|\int_{t'}^{t''} \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \Delta q(t)\,\mathrm{d}t\right| \simeq \hbar \tag{9.12}$$

が成り立つ。ここで $q(t)$ は対応するデータ α の中心の径路であり $\Delta q(t)$ はこの径路からの典型的なズレであって，(9.11) の左辺を最大値にするものである。不等式 (9.11) と等式 (9.12) は連続測定に対する不確定性原理 (**作用不確定性原理**，AUP) の別の形である。実際の系と測定に対してこの原理をど

のように適用できるかは以下の節に与える例からわかる。

量

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)}=\frac{\partial L(q,\ \dot{q})}{\partial q(t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(q,\ \dot{q})}{\partial \dot{q}(t)} \tag{9.13}$$

は古典運動方程式

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(t)}=0$$

の左辺に他ならない。これが等式 (9.12) を象徴的に

$$\delta(\text{式})\Delta(\text{径路})\simeq\hbar$$

と書ける理由である。これは，古典描像からのズレは粗い測定 (Δ(径路) が大きいとき) に対しては小さいはずであるが，精密な測定 (Δ(径路) が小さいとき) に対しては大きいことがありうることを示している。量子領域において行われる精密な測定は系の非古典的な振舞いを生じる (われわれが意味するのは測定データによって推定されうる振舞いである)。

古典方程式の左辺 (9.13) がゼロでないならば，このゼロでない値に等しい仮想的な力 $\delta F(t)$ が生じたとも言えるだろう。したがって等式 (9.12) は次のように書き直せる：

$$\left|\int_{t'}^{t''}\Delta q(t)\,\delta F(t)\,\mathrm{d}t\right|\simeq\hbar \quad 。\tag{9.14}$$

ここで AUP の左辺は，測定の結果として生じる仮想的な力 $\delta F(t)$ によって定義される

$$\Delta p(t)=\delta F(t)\,\mathrm{d}t$$

を用いて，ふつうの不確定性原理の左辺 $\Delta p(t)\Delta q(t)$ の積分として表わされる。

AUP とハイゼンベルクの不確定性原理との質的な違いは，前者が単一の測定データの変動を扱っていて，後者のように (相補的な変数の) 二つの測定に関するものではないことである。これは，もちろん，この単一の測定が連続測定であって互いに相補的なオブザーバブルの両方についての情報を含むからである。例えば，位置のモニターは測定している時間の間の系の位置と

運動量の両方についてある情報を与える。

9.5 量子力学からの例

量子力学における AUP の応用の二つの簡単な例を考えよう。それは自由粒子と調和振動子の位置のモニターである。1 次元の粒子と振動子の場合だけを考えるが多次元への拡張は簡単である。

9.5.1 自由粒子の位置のモニター

$$m\ddot{q}=F \tag{9.15}$$

という形の古典運動方程式を持つ (1 次元の) 自由粒子を考える。(9.14) 式に現われ量子測定雑音を記述する仮想的な力はこの式，$\delta F=m\ddot{q}$，の左辺と一致する。誤差 Δa での座標のモニターの場合，帯の中の径路の典型的なズレに対しては $|\Delta q|=\Delta a$ である。したがって (9.14) 式は

$$\Delta a\int_{t'}^{t''}|\delta F(t)|\mathrm{d}t\simeq\hbar \tag{9.16}$$

となる。

この式を使うには，力の形について仮定しなければならない。粒子に現実に働く力が一定，$F=$一定，であるとしよう。この力についての測定結果にもとづく信頼できる結論は，この力が測定雑音として生じる**同じ形の**仮想的な力よりも大きい場合にだけ可能である。(9.16) から一定の仮想的な力

$$\delta F=\delta F_0=\text{一定}$$

は，その値が $\delta F_0\lesssim\delta F_{\mathrm{quant}}$ ならば生じうる。ここで

$$\delta F_{\mathrm{quant}}=\frac{\hbar}{T\Delta a} \tag{9.17}$$

であり，$T=t''-t'$ である。これは自由粒子の位置のモニターによって一定の力を推定するさいの量子測定雑音の大きさである。

古典測定雑音を得るためには，運動方程式 (9.15) と力が一定の場合のこの

式の解

$$q(t)=q(t')+\frac{1}{2}\frac{F}{m}(t-t')^2$$

を使わなければならない。時間間隔Tの間の力の影響の下での座標の最大のズレは

$$q(t'')-q(t')=\frac{1}{2}\frac{F}{m}T^2$$

である。したがって誤差Δaでの座標のモニターによって（古典論に従えば）力Fは

$$\delta F_{\mathrm{class}}=\frac{m\Delta a}{T^2} \tag{9.18}$$

の程度の誤差をもって推定される。

一定の力の推定の全部の誤差は

$$\delta F_{\mathrm{total}}=\delta F_{\mathrm{class}}+\delta F_{\mathrm{quant}}=\frac{m\Delta a}{T^2}+\frac{\hbar}{T\Delta a}$$

である。

$$\Delta a_{\mathrm{opt}}{}^2=\frac{\hbar T}{m} \tag{9.19}$$

とすると，この誤差は$\Delta a \gg \Delta a_{\mathrm{opt}}$に対して純粋に古典論的（(9.18)に等しい）であり，$\Delta a \ll \Delta a_{\mathrm{opt}}$に対して純粋に量子論的（(9.17)に等しい）である。第1の場合は測定の古典領域であり，第2の場合は量子領域である。

測定誤差Δaが非常に大きな値から減少してゆくとすると，力の推定の誤差$\delta F_{\mathrm{total}}$は，$\Delta a$が量子閾値$\Delta a_{\mathrm{opt}}$になるまで減少し，それからまた増大する。測定の最適領域は測定誤差ΔaがΔa_{opt}の程度であるときに対応する。そのとき力の推定の誤差は（大きさの程度で）

$$\delta F_{\mathrm{opt}}=\sqrt{\frac{\hbar m}{T^3}} \tag{9.20}$$

である。位置の推定の誤差は

$$\delta q_{\mathrm{opt}}\simeq\Delta a_{\mathrm{opt}}=\sqrt{\frac{\hbar T}{m}} \tag{9.21}$$

である。

(9.21), (9.20) 式は自由粒子の位置とこの粒子に働く一定の力の測定可能性に対する，いわゆる，**標準量子限界** (SQL) を与える。SQL は Braginky (1967)[1] によって導かれた (Braginsky and Vorontsov 1974, Mensky 1979 a, 1979 b, Caves et al 1980, Caves 1985 をも見よ)。径路積分法の枠内でこの限界は Mensky (1979 a) が導いた。

注意 3 以上の方法は SQL が絶対的であることを保証している。すなわち，測定が指定された情報 (われわれの場合，ある精度 Δa での径路 $[q]$) を与えるものとすれば，SQL は，測定方式の選び方によって，乗り越えることはできない。しかしその結論が成り立つのは，径路積分を制限する操作に対応するかなり狭い測定の定義を採用するときだけである。この定義に従えば，測定されるオブザーバブル (われわれの場合は座標) は測定されている時間の間ずっと，測定データが示す限界の中に留まっている。もっと弱い定義を採用した研究もある。それは，測定によって系の測定の前の状態についてある情報が与えられるが，測定の間の (ある場合には測定の後の) 状態はこの情報には対応しないとするものである。この定義を採用すれば，ここで導いた式は成り立たない。

同じ系 (自由粒子) だが力の形について別の仮定をした場合を考えよう。粒子に働く力が $\tau \ll T$ の間つづく短いパルスの形を持つとしよう。われわれに興味があるのは同じ形の仮想的な力

$$\delta F(t) = \begin{cases} \delta F_0, & t_1 \leqq t \leqq t_1 + \tau \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である。t_1 は t' と $t'' - \tau$ の間のある時刻である。これを (9.16) の δF に代入すると δF_0 の推定値として

[1] この原論文では SQL の式が振動子の場合に得られている，$\delta F = \sqrt{\hbar \omega m} / T$ (第5章の 5.3.3 節を見よ)。自由粒子の SQL はこの式の特別な場合と考えることができる。これは ω^{-1} の代わりに特性時間 T を代入すれば得られる。

$$\delta F_{\mathrm{quant}}=\frac{\hbar}{\tau \varDelta a} \tag{9.22}$$

を得る。これは考えている場合の量子測定雑音である。

古典測定雑音は力の短いパルスの影響の下での古典自由粒子の運動を考えれば見出される。パルスの中での力の大きさをFとするとそれが粒子に与える運動量は $F\tau$ であり，このパルスの影響下の粒子の変位は

$$q(t'')-q(t_1)\simeq\frac{F\tau}{m}T$$

である ($t''-t_1$ はTの程度とした)。この変位の観測には必ず誤差 $\varDelta a$ がともなうことを考慮すると，測定を信頼してよい最小の力の大きさは

$$\delta F_{\mathrm{class}}=\frac{m\varDelta a}{\tau T} \tag{9.23}$$

である。全測定雑音は (9.23) と (9.22) の和である。最適領域は，この和の二つの項が等しくなる選択，$\varDelta a=\varDelta a_{\mathrm{opt}}$，に対応する。最適領域では

$$\delta F_{\mathrm{opt}}\simeq\frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{m\hbar}{T}},\quad \delta q_{\mathrm{opt}}\simeq\varDelta a_{\mathrm{opt}}=\sqrt{\frac{\hbar T}{m}} \tag{9.24}$$

である。これらの式は与えられた型の測定に対する絶対制限を与え，この測定に対する標準量子限界に他ならない (Braginsky and Vorontsov 1974, Mensky 1979 a)。

9.5.2 振動子の位置のモニター

調べている系が質量mで振動数 ω の調和振動子だとしよう。すると

$$\delta F=m(\ddot{q}+\omega^2 q)$$

である。連続測定が誤差 $\varDelta a$ の座標 q のモニターだとすると，(9.14) 式における径路の典型的なズレは $|\varDelta q(t)|\leq\varDelta a$ に対応する。この不等式の左辺は，$\delta F(t)\geqq 0$ のとき $\varDelta q(t)=\varDelta a$，$\delta F(t)\leqq 0$ のとき $\varDelta q(t)=-\varDelta a$ と選べば，最大になる。これは (9.14) 式を (9.16) にする。

この不等式をみたす仮想的な力 $\delta \mathrm{F}(t)$ が測定雑音として生じ得る。振動子に働く現実の力は，測定雑音として生じる仮想的な力よりも大きければ，

観測できる。

観測できる最小の力を推定するにはその形を知らなければ(あるいは仮定しなければ)ならない。例えば，力が振動数 Ω で調和的だとしよう。(9.16)式によれば，$T=t''-t'$ を測定の時間として $\delta F_0 \simeq \hbar/T\Delta a$ であるならば，仮想的な調和的な力

$$\delta F(t)=\delta F_0 \cos(\Omega t+\varphi)$$

が生じ得る。これは測定の量子領域における観測できる最小の力の推定，$\delta F_{\mathrm{quant}}=\hbar/T\Delta a$，を与える。古典領域に対する対応する推定は，式 $\delta F=m(\ddot{q}+\omega^2 q)$ から出発する，古典測定理論の枠内で得られる。それは $\delta F_{\mathrm{class}}=m|\Omega^2-\omega^2|\Delta a$ を与える。

古典および量子測定雑音の両方を考慮すると，

$$\delta F_{\mathrm{total}}=\delta F_{\mathrm{class}}+\delta F_{\mathrm{quant}}=m|\Omega^2-\omega^2|\Delta a+\frac{\hbar}{T\Delta a}$$

となる。測定の古典領域 (Δa が十分大きい) ではこの和の第 2 項は無視でき，反対に，量子領域 (Δa が小さい) では第 2 項が主になる。測定の最適領域は $\Delta a=\Delta a_{\mathrm{opt}}$ に対応する。ここで

$$\Delta a_{\mathrm{opt}}{}^2=\frac{\hbar}{Tm|\Omega^2-\omega^2|}$$

である。最適領域では観測される力の最小値が得られ，それは (大きさの程度では) 次の δF_{opt} に等しい：

$$\delta F_{\mathrm{opt}}{}^2=\frac{m\hbar}{T}|\Omega^2-\omega^2| \quad 。$$

これは第 5 章の 5.2 節と 5.3 節の結果と合っている。

9.6 量子非破壊測定

上で考えた例は，測定の古典および量子領域の境界に最適精度があるような，連続測定の典型的な状況を明らかにした。それより粗い測定もそれより精密な測定も，前者は古典的な後者は量子論的な測定雑音のために，最適測

定に比べて不利である。測定の最適レベルに対応する測定データの変動は与えられた型の測定に絶対量子限界を課す。これは量子測定理論における**標準量子限界** (SQL) の概念に対応する。

SQL を乗り越えるために，いわゆる**量子非破壊** (QND) 測定が Braginsky et al (1977) によって提案された。この型の測定に対しては，事実，量子領域が存在しないことが Golubtsova and Mensky (1989) によって示された (第6章を見よ)。このことは，9.5 節の例と反対に，この場合には観測可能な力への絶対制限が生じないことを意味する。作用不確立性原理を使ってもっとも簡単な型の QND 測定を考えよう。

9.5 節と同じ調和振動子で別の測定を考えよう。振動子の二つの直角位相成分

$$X = q\cos\omega t - \frac{p}{m\omega}\sin\omega t$$

$$Y = q\sin\omega t + \frac{p}{m\omega}\cos\omega t$$

の一つ X のモニターを行う。X と Y はどちらも QND オブザーバブルであり，互いに相補的である。

オブザーバブル X は q と p をどちらも含むから，その取り扱いには径路積分の相空間 (あるいはハミルトニアン) 表示が必要である。測定データ α に対応する測定振幅は，この表示では，(9.3) 式でなく

$$U_\alpha = \int_\alpha \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int(p\dot{q} - H(p,\ q)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}[p]\,\mathrm{d}[q]$$

の形である。ここで α は測定データと同時に相空間での径路 $[p, q]$ の対応する集合とを表わす。H は系のハミルトニアンであって，調和振動子の場合には

$$H(p,\ q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

である。

作用不確定性原理はハミルトニアンを使って次のように書ける：

$$\left|\int_{t'}^{t''}\left[\left(\dot{q}-\frac{\partial H}{\partial p}\right)\Delta p-\left(\dot{p}+\frac{\partial H}{\partial q}\right)\Delta q\right]\mathrm{d}t\right|\simeq\hbar \quad 。\tag{9.25}$$

この式と (9.12) 式との類似は明らかである。しかしここではハミルトニアン (正準) 運動方程式が (ラグランジュ方程式に代って), 相空間の径路 $[p, q]$ の二つの構成要素 $[q]$, $[p]$ のズレ $[\Delta q]$, $[\Delta p]$ と共に，現われる。

Δp, Δq を ΔX, ΔY で表わすと

$$\Delta p=\frac{\partial p}{\partial X}\Delta X+\frac{\partial p}{\partial Y}\Delta Y$$

$$\Delta q=\frac{\partial q}{\partial X}\Delta X+\frac{\partial q}{\partial Y}\Delta Y,$$

(9.25) 式の左辺は，X と Y の式によって

$$m\omega\int_{t'}^{t''}[\dot{Y}(t)\Delta X(t)-\dot{X}(t)\Delta Y(t)]\mathrm{d}t \tag{9.26}$$

となる。オブザーバブル X だけが測定されるとき，ΔX は有限だが $\Delta Y=\infty$ である(無限大の誤差での測定はまったく測定しないことを意味する)。これが，(9.26) 式の第 2 項が消えるように

$$\dot{X}=0 \tag{9.27}$$

ととらなければならない理由である[2]。この議論によって (9.25) 式は

$$m\omega\left|\int_{t'}^{t''}\dot{Y}(t)\Delta X(t)\mathrm{d}t\right|\simeq\hbar \tag{9.28}$$

の形に書ける。

古典運動方程式によれば直角位相成分 Y は (X とともに) 運動の積分であって，

$$\dot{Y}=0 \quad すなわち \quad Y=一定$$

が古典振動子に対して成り立つはずである。(9.28) 式は，したがって，Y の保存則からのズレが X の測定誤差に反比例することを示す。誤差 Δx での X のモニターに対しては

[2] これは，線形の系の一般的な考察で AUP の左辺のある項を除外することを正当化するのに使ったやり方とよく似ている。われわれは，オブザーバブル Y は古典領域で測定され，和 (9.10) の中の古典的に測定された振動数成分に対応する項と同様に，除外できるのだと考えてよい。

$$\delta Y=\frac{\hbar}{m\omega\Delta x}$$

である。もう一つの直角位相成分Xについてはどうか？その測定は，(9.27)式によって，この変数の保存という古典描像を与える。

Xの測定が相補的な変数Yの動力学には影響するがX自身には影響しないことが重要である。その結果，Xの測定データの変動は測定誤差 Δx の限界内にあって，いくらでも小さくすることができる。この変数の観測可能性については絶対制限は生じない。実際，その測定は本質的に古典的である。これは QND 測定の特徴である。

9.7 量子重力における AUP

径路積分法はすでに量子場，電磁場(第 7 章を見よ)と重力場(Mensky 1985 a)，の測定に応用されている。この型の測定は，時間的にも空間的にも拡がった連続的なものである。このような測定に対する振幅の計算は，軌跡についての積分でなく，場の配位についての積分にもとづかなければならない(‘径路積分’という言葉がこの意味でも，しばしば，使われる)。作用不確定性原理を適用すると，ある連続測定のデータの変動の評価が非常に簡単に行えることを示そう。例として，量子重力における平均曲率の測定を考えよう。

重力場の作用としてアインシュタインの式

$$S=\frac{c^3}{16\pi G}\int_{\Omega}R\,(-g)^{1/2}\mathrm{d}^4x$$

を採用する。時空領域 Ωの 4 次元体積を $L_0{}^4$ とし，この領域で平均されたスカラー曲率を $\bar{R}$ とすると

$$S=\frac{c^3}{16\pi G}\bar{R}L_0{}^4$$

を得る。((9.7) 式と同じように) $\delta S\gtrsim\hbar$ の形の AUP によって

$$\delta\bar{R}L_0{}^4\gtrsim16\pi L_{p\ell}{}^2 \tag{9.29}$$

となる。ここで

$$L_{p\ell}=\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}\simeq 10^{-33}\,\mathrm{cm}$$

はプランク長さである。

不等式(9.29)は平均曲率の測定に対するローゼンフェルトの不確定性関係に他ならない。それはRosenfeld (1966)によって(von Borzeszkowski 1982をも見よ)測定の具体的なモデルを使って導かれ，またMensky (1985 a)によって径路積分法によって導かれた。同じ関係式がAUPによってずっと簡単に導けることが分かる。

9.8 まとめと注意

ある連続測定のデータの確率が高いための条件として簡単な不等式が導かれた。この不等式は連続測定に対する一種の不確定性原理であって，作用不確定性原理(AUP)と呼ばれる。その簡単な形は(9.7)式である。別のある意味でもっと見通しのよい形が(9.11)，(9.12)式である。

この新しい不確定性原理とハイゼンベルクの不確定性原理との主な違いを強調しておかなければならない。後者は二つの異なる測定(例えば，位置と運動量)のデータの変動を制限する。しかし一つの連続測定のデータは位置と運動量(あるいは他の任意の共役なオブザーバブルのペア)の両方についての情報を含んでいる。したがって，この単一の測定のデータの変動について何か制限があるはずである。この制限はAUPで表わされる。(9.12)式から分かるように，(測定の量子領域では)連続測定が精密になるほど，そのデータは古典論によって予言されるものから離れることになる。

典型的な状況で生じるこの原理の定性的な帰結は以下のように定式化できる：

1. 粗い測定に対しては(測定誤差が大きく集合 α が広いとき)古典論が予言する測定データだけが確率が大きい。これが測定の古典領域である。

2. 精密な測定に対しては(誤差が小さくて集合 α が狭いとき)古典論から遠い測定データも確率が高い。測定が精密なほど，高確率の測定データの範囲が広い(これは量子測定雑音と呼ばれる)。これが測定の量子領域である。

3. 最適領域は測定の古典および量子領域の間にある。それより粗い測定は古典的測定誤差のために効率が悪い。それより精密な測定は量子測定雑音によって効率が悪い。

これは対応するオブザーバブルの測定可能性への絶対制限に導く。この制限は，同じ型の測定に対しては，測定装置の選び方を変えても克服することはできない。しかし，測定の型あるいは測定されるオブザーバブルを絶対制限が生じないように選ぶことができる。そのときそのオブザーバブルとその測定は量子非破壊(QND)と呼ばれる。そのような測定に対しては測定の量子領域は存在しない。したがって，この場合，量子閾値はなく，観測可能な力についての絶対制限はない。径路積分の相空間(ハミルトニアン)表示を使えば，QND を径路積分法の枠内で考えることができる。

10. 量子連続測定の群論的構造

この章では量子連続測定をその群論的構造の観点から研究する。それぞれの測定にはそのような構造が2種類あることが分かる。'ヨコ'の群は異なる測定データを互いに変換し，こうしてデータの空間の均質性を現わす。これはすべての測定データについての積分の測度を選ぶのに重要である。

もう一つの群論的構造は'タテ'と呼ぶことができる。それは時間の向きに作用して連続測定を受けている量子系の時間発展を現わす。この構造は群でなく半群で記述されるので，すべての元が逆を持つわけではない。これは，時間発展がきまった向きを持ち(非相対論的な理論では)逆に行えない事情を反映している。

これらの構造のそれぞれを簡単に示したあとで，それらを一つの半群に統一することを考える。その結果の群論的構成は非相対論的粒子の外場の中での発展の場合の構成を拡張したものによっている。

この章の内容はさらに進展を必要とする。ここで読者に示されるのは次の二つの大きな分野を結ぶ可能な連がりについてのいくつかのヒントだけである。その分野とは量子連続測定の理論と径路群の定式にもとづく量子論である。

10.1 測定下の発展

量子論，とくに素粒子論，における群論的方法はここ数十年の間に重要な結果に導いた(Wigner 1939, Newton and Wigner 1949, Wightman 1962, Mensky 1976, 1983 a をも見よ)。この章では Mensky (1990 b) に沿って，

量子連続測定の記述の中で現われる群論的構造の分析を行う。

群論的構造の源は二つある。一つは時間発展が時間について連続的に行われることである。連続測定の下での発展は半群によって記述でき，そのそれぞれの元は時間間隔だけでなくその間隔において得られる測定データをも特徴づけることが示される。この半群をタテの群と呼ぶ。

群論的構造のもう一つの源は異なる測定データの同等性である。この同等性は異なるデータを互いに変換する変換群によって記述される。'タテ' と 'ヨコ' という言葉は連続測定のもっとも典型的な例，すなわち座標対時刻の図で表わした座標のモニター，に由来する。そのとき時間方向は，タテであり座標方向はヨコである。

われわれは，第4章の4.3節から，量子連続測定とその測定の下での量子系の発展とは径路積分によって記述できることを知っている。それを行うには，伝播子に対する径路積分の表式の中での積分は重み汎関数によって制限しなければならない。ここで記号を変えて，測定データ α を重み汎関数では添字でなく引数とするほうが便利である：

$$U_\alpha(q'', q')=\int_{q'}^{q''} \mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]\right)w(\alpha, [q]) \quad 。 \tag{10.1}$$

ここで $w(\alpha, [q])$ は $[q]$ の汎関数であって，径路 $[q]$ がデータ α に含まれる情報と両立するときは1に近く，それ以外では，ゼロに近い。測定間隔は $[t', t'']$ である。

2点関数としての伝播子の代わりに（この2点関数を核として）対応する作用素：

$$U(\alpha)=\int \mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]\right)w(\alpha, [q])\,V[q] \tag{10.2}$$

を使うことができる。積分は可能なすべての端点を持つ径路について行い，$V[q]$ は径路 $[q]$ に沿っての移動の作用を表わす：

$$(V[q]\psi)(q'')=\begin{cases} \psi(q'), & q(t')=q',\ q(t'')=q'' \\ 0 & ,\ q''\neq q(t'') \end{cases} \quad 。 \tag{10.3}$$

考えている系が初めの時刻 t' に状態 $|\psi'>$ にあったとすれば，最後には状態

$$|\psi''(\alpha)> = U(\alpha)|\psi'> \tag{10.4}$$

にあり，これは，もちろん，測定結果 α による。初めに密度行列 ρ' で記述される混合状態にあったとすると終状態は

$$\rho''(\alpha) = U(\alpha)\rho' U^\dagger(\alpha) \tag{10.5}$$

である。

この発展則は測定結果が知られているときにだけ成り立つ。もし測定結果が知られていない（非選択測定）か，あるいは，発展について実験に先立っての計算をしようとするときは，すべての異なる測定結果について和を行わなければならない（第4章の4.3節を見よ）。：

$$\rho'' = \int \mathrm{d}\mu(\alpha)\, U(\alpha)\rho' U^\dagger(\alpha) \quad 。 \tag{10.6}$$

10.2　異なる測定結果に対するヨコの群

異なる測定データのうちのあるものは他のものより確率が大きいが，これは測定振幅の計算の結果である。先験的には（振幅を計算する前には）すべての異なる測定データは同等なはずである。このことは，ある群 G が異なる測定結果の集合に推移的に作用し，測度 $d\mu(\alpha)$ はこの作用について不変であることを意味する。この群をヨコの群と呼び，ヨコの群の異なる結果と径路への作用を

$$g : \alpha \to g\alpha, \quad g : [q] \to g[q]$$

と表わそう。測定汎関数は

$$w(g\alpha,\ g[q]) = w(\alpha,\ [q]) \tag{10.7}$$

の意味で不変であるとする。これは $w(\alpha, [q])$ の値が径路 $[q]$ とデータ α を特徴づける径路 $[q]_\alpha$（例えば，$[q]_\alpha$ は座標のモニターのデータを表わす帯の‘真ん中の径路’である）との‘距離’にしかよらないことを意味する。$[q]_\alpha$ と

$[q]$ の同時で同等な変化は上の距離をしたがって $w(\alpha, [q])$ の値を変えない。これが式 (10.7) が意味することである。

実際上汎関数 $w(\alpha, \cdot)$ は測定データ α を完全に決定する。したがって，ヨコの群の径路への作用が与えられれば，異なる測定データへのその作用は (10.7) 式から導ける：

$$w(g\alpha, \cdot)=w(\alpha, \cdot)\cdot g^{-1} \quad 。 \tag{10.8}$$

ヨコの群 G の異なる測定データへの作用は推移的である。これが，任意のデータ α が前に与えた‘標準的な’データ α_0 から，対応する群の元によって，$\alpha=g\alpha_0$ として得られる理由である。すべてのデータについての積分は，したがって，群 G についてのある測度 $\mathrm{d}g$ での積分に帰着する：

$$\mathrm{d}\mu(\alpha)=d\mu(g\alpha_0)=\mathrm{d}g \quad 。$$

この測度が不変であることを要求するのは自然である：

$$\mathrm{d}(g_1 g)=\mathrm{d}g \quad 。$$

ヨコの群がすべての径路の集合に対しても推移的であるならば，任意の径路 $[q]$ が，適当な群の元の作用によって，前に与えた‘標準的な’径路 $[q_0]$ から $[q]=g'[q_0]$ として得られる。径路についての積分もまた，ある条件の下で，群の上の積分に帰着する：

$$\mathrm{d}[q]=\mathrm{d}(g'[q_0])=\mathrm{d}g' \quad 。$$

$$w(\alpha_0, g'[q_0])=w(g')$$

と書くことにすると，測定を記述するすべての汎関数 $w(\alpha, \cdot)$ の集合を群の上の一つの関数に帰着させることができる：

$$w(\alpha, [q])=w(g\alpha_0, g'[q_0])=w(\alpha_0, g^{-1}g'[q_0])$$
$$=w(g^{-1}g') \quad 。$$

すると作用素 (10.2) は純粋に群論的な形

$$U(\alpha)=U(g\alpha_0)=\int \mathrm{d}g' \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(g')\right)w(g^{-1}g')\,V(g')$$

にすることができる。ここで記号

$$S(g')=S(g'[q_0]), \quad V(g')=V(g'[q_0])$$

が導入されている。

ヨコの群の(実際はまったく一般的な)一例として次の曲線の群を考えよう(図10.1)：

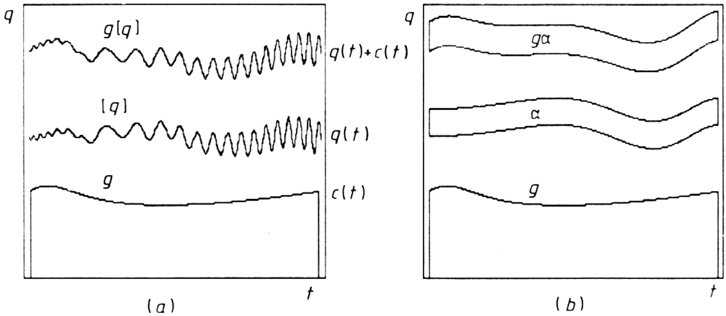


図 10.1：ヨコの群の (a) 径路 $[q]$ への作用と (b)(測定としての座標のモニターに対する) 測定データ α への作用。

$$g=\{c(t)\,|\,t'\leq t\leq t''\}\quad。$$

それぞれの $c(t)$ は座標 $q(t)$ が属す配位空間における変位である。径路への群の作用は

$$g[q]=\{q(t)+c(t)\,|\,t'\leq t\leq t''\} \tag{10.9}$$

である。

連続測定が(与えられた時間間隔にわたって平均された)平均座標の測定であるとしよう：

$$\bar{q}=\frac{1}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}q(t)\,\mathrm{d}t\quad。$$

そのとき測定結果は，平均座標の推定と解釈される数 a(あるいは多次元ならばベクトル)によって表わされる。この型の測定は汎関数

$$w(a,\ [q])=W(a-\bar{q}) \tag{10.10}$$

によって記述される。Wは測定装置の性質(その特性)を表わす関数である。異なる測定結果へのヨコの群の作用はその変位である：

$$ga=a-\bar{c},\quad \bar{c}=\frac{1}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}c(t)\,\mathrm{d}t \quad 。$$

もう一つの例は

$$q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\sin\Omega_n(t-t'),\quad \Omega_n=\frac{\pi n}{t''-t'}$$

で定義される径路 $[q]$ のスペクトル成分 q_n の測定である。測定結果は数 $(a_1, a_2, \cdots)$ の集合と

$$(ga)_n=a_n-c_n$$

によって記述される。ここで c_n は関数 $c(t)$ のスペクトル成分である：

$$c_n=\frac{2}{t''-t'}\int_{t'}^{t''}c(t)\sin\Omega_n(t-t')\,\mathrm{d}t \quad 。$$

スペクトル成分 q_n の測定を記述する汎関数は

$$w(a_1,\ a_2,\ \cdots;[q])=\prod_{n=1}^{\infty}W_n(q_n-a_n)$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n(q_n-a_n)\right) \tag{10.11}$$

ととってよい。

終りに連続測定のもう一つの例，すなわち，座標の連続モニター，を考える。この測定の結果は座標（配位）空間における曲線 $[a]=\{a(t)\,|\,t'\le t\le t''\}$ によって表わせる。対応する汎関数は

$$w([a],\ [q])=W\left(\int_{t'}^{t''}(q(t)-a(t))^2\,\mathrm{d}t\right) \tag{10.12}$$

の形に，あるいはもっと一般の形

$$w([a],\ [q])=W\left(\int_{t'}^{t''}f(q-a)\,\mathrm{d}t\right)$$

にとることができる。ヨコの群の作用は，この場合，変位

$$g[a]=[a-c]=\{a(t)-c(t)\,|\,t'\le t\le t''\}$$

であることが分かる。

10.3 時間発展に対するタテの半群

時間発展に結びついた群構造を扱うには，初めと終りの時刻を明記して，いままでの記号をもっとくわしくしなければならない。径路を $[q]$ でなく $[q]_{t'}^{t''}$ で，測定結果を α でなく $\alpha_{t'}^{t''}$ で表わす。いままでの式は容易に新しい記号に書き直せる。特に発展則は

$$|\psi''(\alpha)>_{t''}=U(\alpha_{t'}^{t''})|\psi'>_{t'}$$

となる。

もしもう一つの連続測定が時間間隔 $[t'', t''']$ において行われてデータ $\alpha'{}_{t''}^{t'''}$ を与えたとすれば，時刻 t''' において系は状態

$$|\psi'''(\alpha'\alpha)>_{t'''}=U(\alpha'{}_{t''}^{t'''})\,U(\alpha_{t'}^{t''})|\psi'>_{t'}$$

にある。この状態は，時間間隔 $[t',\ t''']$ での測定を二つの測定の結果として提示するか，それとももっと長い一つの測定の結果として提示するかにはよらないはずである。これは等式

$$U\left(\alpha'{}_{t''}^{t'''}\right)U\left(\alpha_{t'}^{t''}\right)=U\left((\alpha'\alpha)_{t'}^{t'''}\right) \tag{10.13}$$

が成り立つはずであることを示す。

したがって，すべての可能な時間間隔に対応する異なる測定データは半亜群 (semigroupoid) を成す。それは，二つの異なる測定データが隣り合った時間間隔に対応するならば，それらの積が

$$\alpha'{}_{t''}^{t'''}\alpha_{t'}^{t''}=(\alpha'\alpha)_{t'}^{t''}$$

として定義されることを意味する。例えば，位置のモニターに対しては，$\alpha=[a]$ が (径路 $[a]$ のまわりの) 帯であるとき，積

$$[a']_{t''}^{t'''}[a]_{t'}^{t''}=([a'][a])_{t'}^{t'''}$$

は $(a(t'')=a'(t''))$ であるならば) 式 (図 10.2)

$$[a'][a]=[a''],\quad a''(t)=\begin{cases} a(t), & t'\leq t\leq t'' \\ a'(t), & t''\leq t\leq t''' \end{cases} \tag{10.14}$$

によって定義される。同じ式が径路 $[q']$, $[q]$ に対して成り立つ。

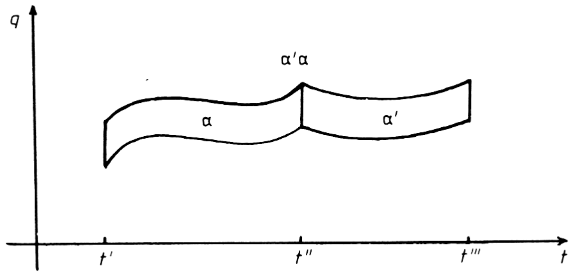


図 10.2：(測定としての位置のモニターに対する) 測定データの積。

測定データ $\alpha_{t'}^{t''}$ に対応する発展作用素 $U\left(\alpha_{t'}^{t''}\right)$ は，(10.13) 式の結果として，この半亜群の表現を成す。

半亜群の‘半’は考えている代数構造には一般には逆元が存在しないことを示す。半亜群は，元の任意のペアの積をつくることはできない点で，半群と違う。いまの場合，隣り合う時間間隔に対応する可能事象だけが積をつくり得る。α' と α の積がつくれるためにはさらにある条件が要求される。例えば，位置のモニター $[a']$ と $[a]$ は $[a]$ の終りが $[a']$ の始まりと一致するならば積をつくることができる。

注意　1　ハミルトニアンが時間にあらわによらなければ時間は均質であり，半亜群から半群に移れる。するとわれわれの群構造のどの元も，必ずしも逆元は持たないが，積をつくることができる。この構成法は 10.4 節で考える。

径路の空間の測度 $d[q]$ と変位作用素 $V(\alpha)$ とは乗法的である。したがって，(10.13) の要求は，測定汎関数もまた乗法的で

$$w(\alpha'^{t'''}_{t''},\ [q']^{t'''}_{t''})\,w(\alpha^{t''}_{t'},\ [q]^{t''}_{t'})=w((\alpha'\alpha)^{t'''}_{t'},\ ([q'][q]^{t'''}_{t'})$$

であるならば，成り立つだろう。

$W(x)$ が指数関数であり汎関数 w がガウス型

$$w\left([a]_{t'}^{t''},\ [q]_{t'}^{t''}\right)=\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\int_{t'}^{t''}(q-a)^2\mathrm{d}t\right) \tag{10.15}$$

であるならば，汎関数 (10.12) はこの要求をみたす。この場合，汎関数 (10.12) で記述される系の座標 (あるいはすべての座標の組) をモニターすることは乗法性を持つ。したがって状態の時間についての変化は測定を取り入れた系の発展と見ることができる。そのとき測定自身が引きつづく時間間隔の間に行われる部分的測定の結果と理解される。(しかし，下記の注意 2 を参照のこと)。

汎関数 (10.10) と (10.11) は乗法的でなく，その場合の測定は時間について全体的と言える。この型の測定に対しては自然なタテの群構造は存在しない。

測定を記述する汎関数が

$$w\left(\alpha_{t'}^{t''},\ [q]_{t'}^{t''}\right)=\exp\left(-\int_{t'}^{t''}f(A(q(t))-a(t))\mathrm{d}t\right) \tag{10.16}$$

の形を持つならば乗法性を持つことが示せる。これは，$f(x)=x^2/\sigma$ に対しては，オブザーバブル $A(q)$ の連続モニターを記述するガウス型汎関数となる。f が任意の (正) 関数のときも汎関数 (10.16) は $A(q)$ のモニターを記述するが，ただし，別の (ガウス型でない) 測定装置を使うものである。このようにモニターは，実際，時間発展する (時間について局所的な) 連続測定のもっとも一般的な場合である。

***注意　2**　装置のガウス的特性 (10.15) は時間間隔 $T=t''-t'$ に依存する有効測定誤差

$$\Delta a=\frac{\sigma}{t''-t'}$$

に導く (4.2，4.4 節の議論を見よ)。汎関数 (10.16) を，$f(x)$ が平らな底を

---

* **注意 2** は日本語版の作成にあたって著者が全面的に書き直したものである (訳者)。

持つ“ポテンシャルの井戸”の形を持つように選ぶと有効測定誤差は一定になる。極限の(理想的な)場合は，測定装置が矩形の特性を持つ場合に相当する

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|\leq\Delta a\\ \infty, & |x|>\Delta a\end{cases}$$

の形の関数である。

ここまで連続測定を配位空間における径路$[q]$についての積分によって記述してきた。一般にはこれは不十分であって相空間における径路$[q, p]$についての積分が必要である。そのとき発展作用素の形は

$$U\left(\alpha_{t'}^{t''}\right)=\int \mathrm{d}\left([q]_{t'}^{t''}\right)\mathrm{d}\left([p]_{t'}^{t''}\right)$$
$$\times\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t'}^{t''}(p\dot{q}-H(p, q)\mathrm{d}t\right)w\left(\alpha_{t'}^{t''}, [q, p]_{t'}^{t''}\right)V[q] \quad (10.17)$$

となる。時間発展的な測定を記述する乗法的な汎関数の形は($\alpha=[a]$に対して)

$$w\left(\alpha_{t'}^{t''}, [q, p]_{t'}^{t''}\right)=\exp\left(-\int_{t'}^{t''}f(A(q(t), p(t))-a(t))\mathrm{d}t\right) \quad (10.18)$$

となる。このような汎関数の導入は，形式的には，ハミルトニアンに虚部を含めることと同等であることを注意しておこう。

10.4　ヨコの構造とタテの構造の統一

Mensky (1983 b，1985 b)は，並進群のガリレイ群への拡張と同様にして，軌跡(パラメーター付けした径路)の半群の拡張を構成した。その拡張は外場の中での非相対論的粒子に対する径路積分と作用の群論的導出に使えることが示された。それと同様な構成をここまでで定義したヨコの群とタテの半群をガリレイ型の一つの半群に統一するのに使うことができる。連続測定

の例としての座標のモニターに対してこれを行おう[1]。

まず，時間の均一性を使って半亜群を半群にしよう。$\alpha_{t'}^{t''}=[a]_{t'}^{t''}$ に対して関数 $[u]_T=[\dot{a}]_{t'}^{t''}$ を導入する。ここで $T=t''-t'$ であり，

$$u(t)=\dot{a}(t+t'),\ 0\leq t\leq T$$

である。ここで，次の場合に二つの元を同一視する（すなわち，同等と扱う）

$$[a]_{t'}^{t''}\sim[a']_{t'+\tau}^{t''+\tau}\quad。$$

それは，その二つの元に同じ関数 $[u]_T$ が対応する場合，すなわち

$$\dot{a}(t)=\dot{a}'(t+\tau)$$

の場合である。この結果，任意の二つの同値類は積をつくることができ，半亜群は半群に変る。実際，任意の二つの類の積をつくるには，それらの中に代表を選び，その代表の積が (10.14) 式の意味で可能なようにすれば十分である。その積は（類の積として定義される）新しい積の代表を与える。こうして得られる半群の元は曲線 $[u]_T$ によって表現される。

この半群のほかに，曲線

$$[v]=\{v(t)|-\infty\leq t\leq\infty\} \tag{10.19}$$

から成る群を導入しよう。そのような曲線に対応する元はガリレイ変換の類似物だが，速度は時間による。配位空間が（非相対論的粒子の配位空間に対する廻転群に似た）群 R によって記述されるある対称性を持つとしよう

任意の $r\in R$ に対して

$$r[v]r^{-1}=[rv],\ r[u]_Tr^{-1}=[ru]_T \tag{10.20}$$

であるとしよう。さらにもう一つの関係

$$[v][u]_T=[u+\tilde{v}]_T[\tilde{v}],\ \tilde{v}(t)=v(t-T) \tag{10.21}$$

を認めると $g=[u]_Tr[v]$ の形のすべての元の集合 G は半群をなす。

$g=[v]$ の形の元の半群は，明らかに，異なる測定結果に（あるいは同じことであるが軌跡 $[u]_T$ に）作用するヨコの群と考えることができる：

$$[v]:[u]_T\rightarrow[u+v]_T\quad。$$

---

[1] 実際は，座標の代わりに任意のオブザーバブル A をモニターしても，重要なことは何も変らない。

この作用は，直接，径路$[a]_{t'}^{t''}$によって表わすことができる：

$$[v]:[a]_{t'}^{t''}\to[a']_{t'}^{t''},\quad a'(t)=a(t)+\int_0^{t-t'}v(s)\,\mathrm{d}s\quad。$$

したがって半群Gはヨコの群を部分群として，タテの半群を部分半群として含んでいる。他方，半群Gの構造は，非相対論的粒子の径路積分形式と動力学を群論的に導く目的で，Mensky (1983 b，1985 b) が導入した半群の構造によく似ている。

10.5 まとめと注意

以上の考察から明らかに生じる問題は，ここで導入した群論的構成のどの表現が対応する系の発展を記述する時に現われるかということである。連続測定を受けている量子系は，古典的特徴も量子的特徴も同時に持つような，まったく新しい型の発展をする。これが，あるオブザーバブルがモニターされている系の表現論的分析が，外場の中での系の対応する分析とともに，非常に興味がある理由である。これらの二つの場合にガリレイ型の半群は，事実，非常によく似ているが，発展を記述するときに現われる表現は測定されているときにはさらに複雑であるに違いない。

11. 径路と測定：新しい展開

いままでの章では量子連続測定への径路積分形式の応用をいろいろな面で分析した。この問題をもっと広い観点から考えていくつかの展望を述べよう。この最後の章の目的は量子物理学において径路が果たす奇妙な役割を明らかにすることにある。

効率のよい数学的形式であるばかりでなく，径路は量子論の強力な概念装置であることが分かる。その結果として，径路を使って定式化するとき，量子力学のいくつかのパラドキシカルな面がもっと明らかになったり，矛盾がなくなったりする。

これに関連した三つの問題を考える：(1) 量子論と古典論との関係，(2) 二つのスリットの実験のパラドックスおよび (3) 波と粒子の二重性である。

量子論的および古典論的性質の両方を持ちそして古典および量子極限への自然な移行を許すような量子過程の記述を制限された径路積分が与えることが分かる (11.1 節)。二つのスリットの実験では，‘広がった点’ すなわちその点への径路とともに考えた点を使って分析すれば，パラドキシカルな面はなくなる (11.2 節)。最後に，径路によって素粒子を記述すれば，波 (全体的) と粒子 (局所的) の性質がどちらも同等に自然に取り入れられる (11.3 節)。

この点を，相対論的な理論において，径路群にもとづいて展開できることは重要である。これはもっとも重要な現代の場の量子論の領域——重力とゲージ理論——に対してエレガントで強力な群論的基礎を与える。

11.4 節では測定にともなう波束 (あるいは状態) の収縮を径路積分の方法の枠内で議論する。量子測定理論の複雑な概念的な諸問題をそれに関連して述べる。

*最後の二つの節は日本語版のために書いたものである。11.5 節では制限された径路積分 (RPI) 法の正当化の問題に関する以下の問題を論じる；ｉ) 連続測定の具体的なモデル，ii) RPI と無矛盾歴史法との関係，iii) 測定によって与えられる情報についての知識が，測定による測定される系への反作用を知るのに十分であると主張する情報原理，iv) 開かれた量子系の RPI 理論，ｖ) 厳密な数学的定義という点から見た制限された径路積分の優位性。

最後の 11.6 節では本書の第 1 (英語) 版が出たあとで考えられた，この方法の次の二つの新しい応用の短い紹介をする，ｉ) ウンルー効果における局在性，ii) 軌跡の古典および量子カオス。**

11.1　連続測定における量子論的および古典論的な特徴

いろいろな状況の分析において，連続測定を考慮に入れた量子系の時間発展は測定振幅，すなわち条件つきの (制限された) 伝播子

$$U_\alpha(q'',\ q')=\int_{q'}^{q''} \mathrm{d}[q]\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]\right)w_\alpha[q] \tag{11.1}$$

によって記述できることを見てきた。ここで α は測定データであり，w_α はこのデータに含まれる情報に対応する径路積分の制限を表わす汎関数である。

分析のためには，α を粒子あるいは何かある系の座標のモニター (径路の測定) のデータと理解してよい。すると α は (測定の結果として生じる) ある径路$[a]$ とすることができ，汎関数 $w_\alpha[q]$ は径路 $[q]$ が $[a]$ に近いときにゼロでない。(11.1) 式の積分は，そのとき実質的に，$[a]$ のまわりの径路のある帯によって境界付けられる。帯の幅 Δa は座標のモニターの誤差に他ならない。

われわれは第 4 章の 4.3 節で，測定される系の発展は

$$|\psi_\alpha'\rangle=U_\alpha|\psi\rangle \tag{11.2}$$

という式で記述されることを見た。この式を系の量子的および古典的な面の関係という観点から分析しよう。

* ここからの二つの文節 (** まで) は日本語版の作成のさい著者が追加したものである (訳者)。

測定データ α は，古典的な測定装置の作用の結果として生じるのだから，本質的に古典的である。例えば，座標のモニターの場合にはデータ $[a]$ は粒子の軌跡（あるいは配位空間における量子系の軌跡）である。実際にはわれわれは唯一つの径路 $[a]$ を得るのでなく $[a]$ のまわりの帯を得るのである。けれども，これは，現実の粒子が量子であるからではなくて，現実の測定が有限の精度（したがって有限の誤差 Δa）を持つからである。

制限された（条件つきの）伝播子 U_α は典型的な量子論的な対象であって，粒子（あるいは何かの系）の波動関数に作用する作用素である。したがってここには運動の量子的および古典的な特徴がどちらもあり，この記述は量子的および古典的な要素をどちらも含んでいる。系の発展の結果はその古典軌跡が $[a]$ であるとして記述することができるが，われわれはまた，初め $|\psi\rangle$ であった系の波動関数が，測定の後，$|\psi_\alpha'\rangle$ になることを知っている。

測定には根本的に異なる二つの領域，古典領域と量子領域，があることを第 4 章と第 9 章で典型的な場合について示した。古典領域は測定が十分に粗いとき（$\Delta\alpha \gg \Delta\alpha_{\mathrm{opt}}$）に生じ，量子領域は精密な測定（$\Delta\alpha \ll \Delta\alpha_{\mathrm{opt}}$）に特徴的である。これらの二つの領域の間（$\Delta\alpha \simeq \Delta\alpha_{\mathrm{opt}}$）に最大の情報を与える測定の最適領域がある。系の運動の量子的および古典的要素の間の関係という観点からこれらの領域を考えよう。

測定結果 α をあいまいさなく予言することはできない。これらの結果にはいつでもある変動，$\delta\alpha$，がある。測定の古典領域（$\Delta\alpha \gg \Delta\alpha_{\mathrm{opt}}$）ではこの変動は測定の誤差と一致する：

$$\delta\alpha = \Delta\alpha \quad 。$$

例えば，古典領域において測定の結果として得られる粒子の軌跡 $[a]$ は，測定誤差 Δa の限界の中で，古典軌跡 $[q_{\mathrm{class}}]$ と一致する。したがって，測定結果 α の性質は測定の古典領域においては本質的に古典的である。

古典領域における波動関数の発展については何が言えるだろうか？第 9 章の 9.2 節で強調されたことは，測定の古典領域では，制限された伝播子 U_α は制限されないファインマン伝播子 U と，すなわち，ふつうの量子力学的な発

展作用素と一致することであった。したがって古典領域では，測定結果（例えば粒子の軌跡）は純粋に古典論的な性格である一方，系の波動関数は純粋に量子論的な発展則（シュレーディンガー方程式）に従う。

測定の量子領域（$\Delta\alpha \ll \Delta\alpha_{\rm opt}$）では測定の結果 α は測定誤差よりもずっと広い変動を示す：

$$\delta\alpha = \frac{\Delta\alpha_{\rm opt}{}^2}{\Delta\alpha} \gg \Delta\alpha \quad 。$$

したがって運動の純粋に古典的な特徴づけ α（例えば粒子の軌跡）は系の量子的性質によって強く影響される。これは量子測定雑音と呼ばれる。位置のモニターの場合，測定された軌跡 $[a]$ は古典軌跡 $[q_{\rm class}]$ から測定誤差よりもずっと大きくズレ得る：

$$\delta a = \frac{\Delta a_{\rm opt}{}^2}{\Delta a} \gg \Delta a \quad 。$$

$\Delta a \longrightarrow 0$ の極限ではすべての径路 $[a]$ が同じ確率を持つ。

測定の量子領域において，この記述の量子論的要素，伝播子 U_α，について何を言えるだろうか？もっとも興味があるのは，（古典領域におけるような）単一のユニタリー作用素 U ではなく，部分発展作用素，U_α，の集合があることである。ここで α は可能なデータの集合の中の任意の測定データである。ふつうのユニタリー条件の代わりに，部分発展作用素は

$$\sum_\alpha U_\alpha{}^\dagger U_\alpha = 1$$

の形の一般化されたユニタリー条件をみたさなければならない。

測定の量子領域の一般の場合には，作用素 U_α のそれぞれについて具体的なことは何も言えない。一般にはそれらの振舞いはかなり複雑である（例えば，第4章の4.3節と第5章の5.4節を見よ）。しかし，座標モニターの極限 $\Delta a \longrightarrow 0$ を考えることはやさしい。この場合，ある径路 $[a]$ のまわりの非常に狭い帯が測定の結果として得られる。測定の結果として，径路の集合でなく，事実上一つの径路が見出されると言ってもよい。したがって唯一つの径路 $[a]$（もっと正確に言えば，そのまわりの非常に狭い帯）だけが径路積分

(11.1) に寄与する。こうして得られる伝播子の波動関数への唯一の作用は(そのノルムを変えることを別にして) その位相を $S[a]/\hbar$ だけ変えることである：

$$|\psi'_{[a]}\rangle \sim e^{\frac{i}{\hbar}S[a]}|\psi\rangle \quad 。$$

11.2 二つのスリットの実験

よく知られている二つのスリットの実験は(第1章の1.2節において)，量子測定に対する径路積分法全体の出発点の一つとして，既に論じられている。この実験は量子力学の奇妙な性質の古典的な例証である。この実験にはパラドキシカルなところがある。それは，二つのスリットがどちらも開いているときにシンチレーション・スクリーンに現われる像 P_{12} が第1あるいは第2のスリットだけが開いているときの像 P_1 と P_2 の単純な和ではないことである。

これは，粒子がスクリーンのある点 x に達するにはスリットの一つ(1または2)を通らねばならず，したがって，対応する確率 p_1，p_2 を加えたものが両方のスリットが開いているときスクリーンに達する確率 p_{12} になるはずであるという，古典論の見方と矛盾する。

もちろん，このパラドックスが生じるのは状況を古典論的に考えたからに過ぎない。確率でなく振幅を使う量子論のやり方は正しい結果に導くことをわれわれは知っている。それは第1章の1.2節でくわしく論じた。

しかし，別の方法でパラドックスを除くことを試みる。パラドックスの起源を見てみよう。それは**1点 *x* だけ**があるのにそこに到達する異なる径路があることである。もしも *1*，*2*，および *12* と表わされた状況において異なる点を考えなければならないとしたら，明らかに確率を加えようと考える理由はない。その場合にはパラドックスは起こり得ない。

そこで新しいアプローチを試みる。スクリーンの上の点でなく，**拡がった**

点を問題にしよう。拡がった点の一つ一つは点自身とそこへ導く可能なすべての径路とから成っている。したがって二つのスリットの実験での3種類の開け方では，1個のふつうの点 x は3個の**異なった拡がった点** x_1，x_2 および x_{12} に対応する。拡がった点 x_1 は点 x と第1のスリットを通ってこの点に達するすべての径路とから成る。拡がった点 x_2 は同じ点 x と，しかし，第2のスリットを通ってこの点に達するすべての径路とから成る。最後に点 x_{12} は点 x と両方のスリットを通ってこの点に達するすべての径路とから成る(図11.1)。こうすると，初めの二つの拡がった点に対応する確率を加えたものが第3の拡がった点に対応する確率を与えなければならないという理由はない。

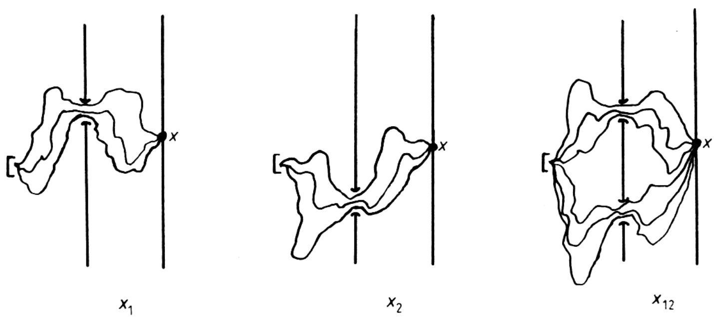


図 11.1：二つのスリットの実験の解釈のための拡がった点。

パラドックスのこの解決のしかたは，一見したところ，不自然に見える。それはその本質がほとんど同語反覆的だからである。それは，せんじ詰めれば，同じことの別の言い方である。しかしこの名前の付け替えは，われわれの考えでは，量子力学の精神を表わすものである。この名前の付け替えの主な発想は，**量子過程のターゲットはその過程自身から分離して考えることはできない，**ということである。ターゲット(スクリーンの上の点)はそこへ達する過程(この点に達する径路)と一緒に考えなければならない。(拡がった点というイメージにまとめられた)この組み合せだけが問題の現象を分析するために**十分な言語**となるのである。

同じ考えを違う形で言うこともできる：量子力学では**状態でなく過程**を扱うほうが自然である。もちろん，状態を考えるのがふつうのやり方である。しかし，状態の言葉から過程の言葉に移行する傾向が見られる。これを支持する一つの論拠はどんな状態でも何かある過程の結果としてつくられることである。

上に述べた拡がった点という概念は，状態から径路に移行したものではなくて，過程（径路）を状態（点）と**一緒に**考えることであるように見える。しかし，すぐ前のパラグラフで述べたように，ターゲットの点xはそこへ達する径路によって十分に表わせる。したがってわれわれは拡がった点x_1，x_2，x_{12}を対応する（それぞれ，スリット1，スリット2あるいは両方を通って点xに達する）**径路の集合**と理解してよい。読者は既に，この最後のイメージがこの本で連続測定を分析するために導入した径路αの集合に近いことを理解したことと思う。

二つのスリットのパラドックスを解くための道具としての径路の言葉の優位性は，Miller and Wheeler (1984) が考えた遅延選択 (delayed choice) のような可能性を考慮に入れるとき，いっそうはっきりする。要点は二つのスリットの実験をある特別のやり方で変更することである。この変更では二つの異なる配置が可能である。その一つでは，粒子が通ったスリットは実験が終った後で知られる。もう一つでは，それを知ることは不可能である。このどちらの方式で測定を行うかの決定が行われるのは，粒子がスリットに入射する時刻よりもずっと後になってからである。通ったスリットを知り得ない場合にだけ量子干渉効果が生じる。これは第1章の1.2節で論じたことである。

遅延選択によって，干渉する配列と干渉しない配列との選択は最後の瞬間に行うことができる。この場合には現象の解析のためには，ターゲットの点に到る粒子の道の歴史の全体が重要であることは明らかである。したがって，ターゲットをその歴史の集合と一緒にした，拡がった点だけが分析に適したものである。

この議論から導かれる一般的な結論は，量子論では，**径路の言葉**のほうが

点の言葉よりも勝っていることである。量子論では径路を使う二つの異なる方法がある。一つはこの本で詳しく論じたものでファインマンの径路積分である。もう一つは Mandelstam (1962) が提案した径路に依存する波動関数(あるいは場)の形式である。どちらも数学的にも物理的にも豊かで美しいが，第2のものだけが量子論では点よりも径路のほうが優れていることを著者に納得させた。11.3節でこの点に少しふれる。

11.3 波と粒子の二重性

二つのスリットで起こる事態は量子力学で典型的な波と粒子の二重性の一つの例である。この二重性の本質は，量子力学的対象には二つの面があって，それぞれ，古典論的な意味での波あるいは粒子に似ていることである。その二つの面のどちらも捨てることはできない；それらのそれぞれが重要になる場合がある。

11.2節での二つのスリットの実験の解析は径路の集合という言葉によって波と粒子の二重性のある面が解明され得ることを示唆する。この問題をもっと詳しく考えよう。

われわれの分析のためにもっとも典型的な連続測定，(例えば) 粒子の位置のモニター，を考えよう。11.1節で論じたように，そのような測定の結果は軌跡 $[a]$ によって表わされる。こうして粒子は一定の瞬間における位置，$a(t)$，という典型的な粒子としての特性を得る。測定の精度，あるいはその誤差 Δa，はこの特性が知られる精度を決定する。したがってこの型の測定は粒子という像を与え，波という像は与えない。

ところが，われわれは分析の結果として，測定は古典論に特徴的でない結果を与えることを知っている (11.1節を見よ)。測定された軌跡 $[a]$ は，粒子の古典軌跡 $[q_{\text{class}}]$ から，測定誤差 Δa よりもずっと大きな値まで違うことがあり得る。したがってわれわれの対象は，粒子と同じ数学的な道具 (位置，軌跡) で記述されるけれども，古典粒子ではない。われわれがそれについて判

断を下せるのはその運動を観察するときである。

その上，この対象を完全に記述するには，その波動関数，あるいは状態ベクトル $|\psi\rangle$，が必要である。これは対象の波としての性質を表わす。対象の粒子的な振舞い（測定された軌跡 $[a]$）を観測するとき，われわれが得る結果は，観測の前の，対象の波としての特性（その初期状態 $|\psi\rangle$）による。

しかし，量子論的粒子の粒子的な性質と波的な性質との間の相互関係の一番完全な描像は制限された（条件つきの，あるいは部分）伝播子 $U_{[a]}$ によって表わされる。実際，粒子の量子的および古典的性質の間の相互関係の 11.1 節における議論は波と粒子の二重性の（別の言葉での）表現に他ならない。

部分伝播子 $U_{[a]}$（および量子論的粒子の発展）は量子論的および古典論的な（波と粒子の）特徴をどちらも持っている。伝播子（発展作用素）としてそれは量子論的であり波の伝播を記述する。けれども，この量子論的発展は定まった古典的データ $[a]$ の枠の中でのみ可能である。これらのデータの各々は古典的な（粒子の）言葉（軌跡）で記述され，その統計は純粋に古典論的（確率であって振幅ではない）である。

次のように言うことができるだろう：連続測定の径路積分理論は軌跡に沿っての粒子の運動の粒としての像を与えるが，実際のそれぞれの発展において，与えられた軌跡に対して，量子論的な発展が行われる；波は軌跡に対応する管（帯）の中を伝播する。

このようにして，量子論的対象の波と粒子の二重性は制限された径路積分の形式によって十分に表わせることがわかる。この本全体がその事の例証である。けれども，量子論にはもう一つ別の径路の応用があって，それも波と粒子の二重性に関係している。それは点でなく径路に依存する波動関数の形式である。

11.2 節の議論は径路に依存する関数が非相対論的量子力学においてさえ役立つことを示している。しかし，それらが相対論的な場の量子論において必要なことはさらに明らかである。そのような関数は量子電気力学において Mandelstam (1962) が導入し，Bialynicki-Birula (1963) が非アーベル・ゲー

ジ場の場合に一般化した。目標はゲージ不変性が自明な形式の建設だった。

径路に依存する定式は数学的に自然で物理的に十分なことが分かる。そのことの一つの結果はこの定式の群論版が可能なことである (Mensky 1983a を見よ)。ここでこの問題をさらに詳しく論じることはできないが，ファインマンの径路積分とマンデルスタムの径路に依存する関数との間には深いつながりがあることを注意しておこう。このつながりの予備的な分析を Mensky (1983 a，b，1985 b，1990 c) が行ったが[1]，さらに展開を必要とする。量子論の性格に新しい光を投げかけるものとして，この研究に驚きを期待してよいだろう。

11.4 概念的な問題

この本の議論の出発点はファインマンの径路積分である。積分の径路の制限が連続測定を受けている量子系への測定装置の影響を記述することが示された。そのような影響はふつう系の状態あるいは波動関数の収縮と呼ばれている。それは，われわれの場合には，連続測定に対応する連続収縮である。状態の収縮に結びついてふつう生じる一般的な概念的な問題はこの型の測定にも共通である。それを簡単に論じよう（といっても，そのいくつかに触れるだけである)。

11.4.1 状態の連続収縮

ふつうの量子測定理論（第 2 章を見よ）では状態の収縮はフォン・ノイマンの射影という特殊なやり方あるいはその一般化によって考慮に入れられる。この本のやり方では，それに代わって，連続測定から生じる状態の連続収縮は径路積分の制限によって考慮に入れられる。これは径路積分法のもっとも重要な利点の一つである：積分の制限という一つの方法が測定データの確率分布とこの測定の影響の下での状態の収縮を両方とも与える。

[1] この定式の，量子連続測定に関連する，いくつかの面は第 10 章で論じた。

言うまでもなく，この型の連続測定は(ほかのどれとも同様に)一つの理想化であることを記憶しておかなければならない。現実の測定装置の影響はこの理想化された影響とは違うかも知れない。測定の影響は与えられた型の情報を得るのに必要なある意味で最少限の影響であることを，径路積分の制限は暗黙のうちに示唆している。同じ情報は，系にもっと強い影響を与えるような，もっと貧弱な装置で得ることができる。しかし，影響をさらに小さくしながら同じ情報を得ることは不可能である。

これが，径路積分法が測定可能性についての絶対量子制限に導く理由である。(汎関数 w_α で推定される)要求される情報を与える装置で径路積分の制限が記述するよりも小さい影響しか与えないものはない。要求される情報を与えながら系にこの最小の影響しか与えないような測定装置のクラスが存在する(そういう装置がどのようにして作れるかについては理論は何も言わない)。他のすべての装置の働きは効率がもっと悪く，径路積分法から分かるよりももっと小さな測定可能性しか与えない。

実際は，後者の非理想的な場合でさえ径路積分法の枠内で取り扱うことができる。もし装置が(与えられた型の測定に対して)非理想的であるとすれば，それはその装置が考えている系について余分な情報を与えるからである(次の節の注 3 を参照)。したがって，与えられた型の測定については非理想的であるこの装置はある異なる型の測定に対しては理想的であってもっと情報を与える。このような測定装置とその影響も径路積分の制限によって記述されるが，その制限は径路のさらに狭い集合を与える。

与えられた測定を受けている与えられた系に対して径路積分を制限する汎関数 w_α の仲間を選ぶことは，もちろん，実際は面倒な仕事である。この本で分析した制限された径路積分の特別な型は，多くの場合，数学的な簡単さのために選ばれたものである。

11.4.2 収縮とは何か？

11.4.1 節で述べた注意は技術的なものである。それはこの方法で状態の収

縮(波束の収縮)がどのようにして考慮されるかを述べている。しかし重要でしかもあまりはっきりしていない概念的な問題がある：収縮とは何であり，それはどのようにして起こるのか？

問題は収縮の記述が(測定の他のどんな面の記述でも同じように)古典的要素を必然的に含むことである。どんな系に対しても完全に正しいのは量子力学的な記述だけで古典的記述は近似に過ぎないと考える(実際多くの人はそうするのであるが)とすれば，量子測定の定式における古典的要素の発生は純粋に量子力学的に説明されなければならない。

この目的のためには測定装置を考察の中にはっきりと含めることができる(そして実際そうしなければならない)。この装置は何らかのしかたで測定される系と相互作用しているふつうの量子系として記述しなければならない。これらの系のふつうの量子力学的な分析によって，波動関数の収縮を含んだ量子測定の分析と同じ結果を得ることが望まれる。

しかし，このやり方は大きな困難に直面する。それは測定装置の異なる状態が，混合でなく，量子論的な重ね合せとして生じるからである。その二つの違いは古典論的な(両立しない)事象と量子論的な(干渉する)事象との違いに似ている(第1章の1.2節を見よ)。非干渉化の現象(第2章の2.1節を見よ)は異なる状態の間の位相についての情報の喪失であるが，それはユニタリーな量子力学的発展の枠の中で記述することはできず，状態の収縮のような何かを必要とする。

この困難を次のように定式化することができる：測定装置を量子系とすると，この系の状態をどのようにして決めるかという疑問が生じる。言いかえれば，測定装置もまた測定されねばならず，われわれは，問題を解決するのでなくて，別の場所へ移すだけである。

この点での本当の問題は，本質的に量子論的な(原理的に観測不能な)系あるいは状態と本質的に古典論的な(無視できるほど小さな反作用で観測できる)系あるいは状態とを結びつける特殊な過程としての非干渉化の研究にある。非干渉化は，研究されている量子系の記述にも，測定装置の記述にも，

導入することはできるけれども，どちらの場合にも，この段階は測定の量子論に典型的なものであるが，ふつうの量子力学には属さない[2]。

非干渉化のこの奇妙な段階を避けるための多くの試みがある。エヴェレット-ホイーラーの量子力学の多世界解釈（Everett 1957, Wheeler 1957, De Witt and Graham 1973 を見よ）はもっとも風変りなものの一つであって，そこでは，可能な異なる事象（異なる測定データ）はすべて実現されるのだがそれは異なる世界においてであって，われわれが観測できるのはその一つだけなのだ，という見解が受け入れられる。この説明は非常に興味があるけれども，満足すべきものとは思えない。それは問題を実際に解く代わりに，問題を別の問題に変えるだけだからである。いずれにしても，いろいろな世界が存在するとすることは，少くともそれが解決するのと同じ数の問題を提起することになる。

解決のためのもっと説得力のある方向がある。量子測定装置の近似的な記述として非干渉化の描像を得ようとする試みがされている（例えば Peres 1980b, Machida and Namiki 1980, 1984, Walls et al 1985, Joos and Zeh 1985, Zimányi and Vladár 1986, Fukuda 1987, Maki 1988, Zurek 1981, 1982, Unruh and Zurek 1989, Namiki and Pascazio 1991 を見よ）。その近似はふつう装置の特徴的な性質，すなわち，それが莫大な数の自由度を持つことと一定の不安定性を持つこと，によって正当化される。

Zurek (1981, 1982) の描像は多くの研究者の間で受け入れられている。それによれば，測定装置との相互作用が系の状態と測定装置の状態の間の相関を生じる一方，環境との相互作用が一種の散逸を与えその相関した状態の重ね合せをそれらの混合に変える（非干渉化の過程）。

この本で考察されている方法は純粋に現象論的である。それは複雑な（拡がっておりまた連続的な）測定の過程で生じる収縮を記述するための有効な道具を提供するけれども，収縮のメカニズムは記述しない。この方法では測

[2] そうでなければシュレーディンガーの猫のようなタイプのパラドックスが生じる（しかし，例えば Song et al (1990) には，古典的に区別できる状態の重ね合わせを生じる方法が提案されている）。

定装置あるいは環境の具体的なモデルは必要ではない。このことの利点は，この方法によって導かれる結論が普遍的な（モデルによらない）性格を持つことである。

この点に関して生じ得る一つの誤解を解いておかなければならない。測定される系と測定する系をどちらも考慮に入れれば現実の測定を（収縮のような量子測定理論に特徴的な要素がなくても）ふつうの量子力学の枠内で完全にまた正確に記述できるのだから，収縮の問題は，そもそも，存在しないと考える人がいる。

典型的な状況が量子ゼノン効果とその実験的検証について起こっている（第2章の2.2節を見よ）。この効果の実験的証明を述べたItano et al (1990)の論文が発表されてから，イタノの実験が実際には量子ゼノン効果を証明していないことを示そうとする論文がいくつか現われた（例えばPetrosky et al 1990）。その論点は，準位2をきちんと考えれば実験結果は，量子測定理論なしに，ふつうの量子力学の枠内で予言できるということである。

私の考えでは，こういう議論は測定の量子論のゴールを誤解している。測定の量子論は量子系での測定の結果と測定の下での系の振舞いを記述する。この記述は量子測定理論の枠の中で**測定装置の具体的なモデルを導入することなしに**得られる。しかし，もちろん，測定装置のモデルを具体的に考えることもできる。それを正しく行えば，得られる予言は同じはずである。上の例では準位2は測定装置の具体的なモデルに他ならない。言うまでもなく，この準位を考慮に入れれば，考えている実験に対する正しい予言を得ることができる。量子測定理論は準位2を具体的に考えなくても同じ結果を与える。それらの二つの方法の間に矛盾はない[3]。

それでは測定の量子論は必要ないだろうと考える人がいるかも知れない。ある意味では，事実，そのとおりである。どんな形の測定の中のどんな系であっても，量子測定理論を使わなくても，ふつうの量子力学の枠の中で考え

[3] しかしイタノの実験は，原子の状態と輻射された光の状態との間にさらに相関を生じるから，ゼノン効果の理想的な状況に完全には対応しないというPetrosky et al (1990)の注意は重要である。

ることができる。しかし，測定の量子論を使えば状況を非常に一般的に考えることができ，また，特定の状況を分析するというやり方ではほとんど到達できない一般的な結論を得ることができる。その上，一般的な性質のある種の問題は，測定の量子論の道具立てなしには，定式化することさえできない。ハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡における光子の運動の考察は不確定性原理と同じ結果に導くが，不確定性原理は，その一般性のために，物理的解析のための有効な道具として非常に重要なのである。

この分析の最終的な結論は，収縮の問題は実用的な計算では避けることができるが，理論的(概念的)レベルでは不可避的に現われるということである。しかし，実用的な研究においてさえ，測定の量子論はその波動関数の収縮という描像とともに，第1に計算を簡単にするために，第2に不確定性原理のような一般的な結果を得るために有用である(本当は必要である)。このような一般的な結論を得ることが現代の量子測定理論のゴールの一つである(例えば Martens and de Muynck 1990 を見よ)[4]。

11.4.3　量子論的-古典論的発展

どういうやり方によってであれ，測定は量子系の記述の中に古典的要素を出現させる。径路積分の方法ではこれは発展則の変更に見られる(先の 11.1 節と第4章の 4.3 節を見よ)。測定を考慮すると発展は，α を測定データとして，(択一的な)作用素 U_α の集合によって記述される。純粋に古典的な要素 α が測定装置の影響の印としてこの記述に現われる。これはある種の測定媒体の影響としてもっと広いしかたで扱うことができる(第4章の 4.4 節を見よ)。

[4] 状態の収縮という現象では観測者の意識が重要な役割をするという仮説がしばしば提唱される。(この考えは量子力学の建設者とともに始まった。最近の論文の中から Squires (1988) の興味ある説をあげておこう) この方向への研究の動機は収縮の概念的な問題を解決することが一見不可能に見えることと，そのことから，量子力学がそれ自身として閉じていないように見えることである。この問題についての議論を考えることは役に立つが，ここではこの仮説をさらに考察することはできない。

事実，この方法の枠の中で新しい型の発展則が導入されている。そこから(11.4.2 節の議論との関連で) この量子論的-古典論的発展則の位置付けの問題が生じる。

現実の事態においてはいつでもある種の測定が行われていることは明らかである。われわれの意味での測定は，系の状態について情報を得てそれを古典的な形にし，系をさらに乱さずにそれを読み取れるようにすることに他ならない。しかし，そのような情報(例えば素粒子の位置の粗雑な推定)はどんな場合にも存在する。どんな量子系も何らかの種類の測定媒体の中で運動していると言うことができる。

他方，ある特定の状況ではこの媒体の影響は無視できてふつうの量子力学の発展則が成り立つということが起こり得る。その事情は 11.1 節で分析した。

量子系と測定装置(媒体)との境い目はいろいろに置くことができることは重要である。簡単のために，系 S_0，S_1，S_2，…があってそれぞれがすぐ前のものを測定するとしよう。われわれは系 S_0 だけを具体的に考え，それ以外のすべての系は系 S_0 の径路を制限するものと考えることができる。そのとき(径路積分の制限によって表わされる)測定の影響はかなり大きいだろう。その代わりに(相互作用している)系 S_0, S_1 を具体的に扱い，この複合系の径路積分の制限として他の系の影響を取り入れることができる。そのとき測定の影響は小さくなるだろう。最後に，十分に多くの系を具体的に考えて他のすべての系の影響は無視できるようにすることができるだろう。そのときは純粋に量子力学的な記述が正しくなる[5]。これは 11.4.2 節の一般論の特殊な定式である。

したがって，連続測定の径路積分理論の枠内での現実の系の記述は実在に対する近似であると言うことができる。この近似が便利かどうかは研究の目的による。いままでの章の議論はこの近似は量子系のいくつかの一般的な特

[5] この場合には，量子論的な可能事象の集合の中からどれが実現するかを知ることは原理的にできない。これは純粋に量子的な観測不能な系である。

徴について有用な結論に導くことがあることを示している。

正反対のしかし魅力的な見方も可能である(例えばGhirardi et al 1988を見よ)。それは連続収縮は量子系の記述における必要な部分であるというものである。それは，収縮は，それを生じるための特殊な装置あるいは媒体なしにも，自発的に起こると想像されるという意味である。この場合には量子系の理論は，量子測定理論のある面をその内部的性質として含む点で，ふつうの量子力学と違うはずである。例えば，径路積分の制限は正しい理論の必然的な部分となる†。

*11.5 RPI法の正当化と重要性

量子連続測定に対する制限された径路積分(RPI)法はファインマンの径路積分理論によって考える者にとっては非常に見通しがよい。しかしこの理論が基本的だと考えない人も多い。そういう人はもっとふつうの原理からRPI法のきちんとした証明を得るほうを好むだろう。その一つの可能性を第2章の2.3.3節の終りに述べた。それは連続測定を一連の測定の極限として考えるものであった。(詳細はMensky (1983 a) にある)。この節の目的はRPI法を正当化する別の方法を示すことである(Mensky 1994a をも見よ)。

その正当化はいろいろな観点から得られることが分かる。それらの質的に違う考察はこの方法が量子論において自然なものであることを示す。その上，11.5.4節において，RPI法という考えは元々のファインマンの径路積分理論の改良になっており，その理論に典型的なある数学的な困難を克服することが分かる。

11.5.1 連続測定のモデル

現象論的なRPI法を正当化するもっとも直接的な方法は次のようにする

† 原書にはこのあと一つのパラグラフがあるが，日本語版で著者はそれを省き，次の二つの節を追加した(訳者)

* この節は著者が日本語版のために追加したものである(訳者)。

ことである：測定装置（計器）のモデルを含む量子測定の具体的なモデルを考える；次に，計器の自由度について積分してしまい，RPI 法の代表的な式を導く。そのプログラムは Konetchnyi, Mensky and Namiot (1993) の論文で実現された。考察の方式はファインマンの影響汎関数の理論 (Feynman and Hibbs 1965 を見よ) と同じである。このモデルの主な性質と計算の結果を述べよう。

Konetchnyi et al (1993) の論文では粒子の位置の連続測定のための測定媒体の簡単な物理的モデルを考える。そして測定の過程で起こる非干渉化が導かれる。連続測定を受けている粒子に対する発展則が RPI 法の中で予言されるものと一致することが示される。

その論文で考えられる（粒子の位置のモニターのための）測定媒体は立方格子の格子点に置かれた多数の相互作用していない量子振動子の系である。それらは測定の前には基底状態にある。それぞれの振動子と粒子との相互作用の距離は有限なので，振動子の励起は粒子が近くを通っていることを意味する。

粒子と振動子との複合系の発展は多次元のファインマンの径路積分によって記述される。振動子の影響を考慮した粒子の発展は振動子の座標について積分すると得られる。この発展は式

$$\rho_T(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2)=\int d\boldsymbol{r}_{01}\int d\boldsymbol{r}_{02}U(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_{01}|\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_{02})\rho_0(r_{01},\ r_{02}), \tag{11.3}$$

$$U_T(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2|\boldsymbol{r}_{01},\ \boldsymbol{r}_{02})=\int_{r_{01}}^{r_1}d[\boldsymbol{r}_1]\int_{r_{02}}^{r_2}d[\boldsymbol{r}_2]\exp\left\{\frac{iM}{2\hbar}\int_0^T dt\,(\dot{\boldsymbol{r}}_2{}^2-\dot{\boldsymbol{r}}_1{}^2)\right.$$

$$\left.-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt[V(\boldsymbol{r}_2,\ t)-V(\boldsymbol{r}_1,\ t)]\right\}F[\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2] \tag{11.4}$$

によって表わされる。ここで $F[\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2]$ は影響汎関数であってきちんと計算できる。

影響汎関数の構造から時刻 T における粒子の状態はそれに先立つ発展の全過程に依存するので密度行列 (11.3) は微分方程式では記述できないことが分かる。

測定媒体が粒子の座標だけでなく，それがこの点にある時刻をも，(有限の精度をもって) 決定するように測定の種類を変えると，状態のそれに先立つ発展への依存は除くことができる。

測定する振動子が二つの添字 k と i によって印しづけられ，そして相互作用ハミルトニアン

$$H_{ki}=\gamma q_k \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c}_k)^2}{\lambda^2}-\frac{(t-\theta_i)^2}{\tau^2}\right] \tag{11.5}$$

を持つとしよう。これは，数 ki で示される振動子は，点 $\boldsymbol{c}_k$ で時刻 θ_i に，τ の程度の時間間隔の間に λ の程度の距離以内にある粒子と相互作用することを意味する。

このモデルは適当な近似の下に影響汎関数

$$F[\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2]=\exp\left[-\frac{1}{\tau\lambda^2}\int_0^T(\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_1(t))^2 \mathrm{d}t\right] \tag{11.6}$$

に導く。

次に，RPI 法から得られる影響汎関数 $W[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ も (11.6) の形を持つことを示そう。

RPI 法では測定される粒子の伝播子は

$$U_\alpha(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_0)=\int_{r_0}^{r}\mathrm{d}[\boldsymbol{r}]\, w_\alpha[\boldsymbol{r}] \exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[\boldsymbol{r}] \tag{11.7}$$

の形を持つ。ここで $S[\boldsymbol{r}]$ は測定される系の作用汎関数であり，α は測定データである。$w_\alpha[\boldsymbol{r}]$ は重み汎関数であって，データ α と矛盾しない径路 $[\boldsymbol{r}]$ に対してだけゼロでない。

4.3 節によれば，非選択的な場合 (測定の具体的な結果が知られないとき) の測定される粒子の発展は，

$$U(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_{01}|\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_{02})=\int \mathrm{d}\mu(\alpha)\, U_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_{01})\, U_\alpha^*(\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_{02}) \tag{11.8}$$

という記号を使えば，(11.3) 式によって記述される。(11.7) 式を代入すると "超伝播子" に対して

$$U(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_{01}|\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_{02})=\int_{r_{01}}^{r_1} d[\boldsymbol{r}_1]\int_{r_{02}}^{r_2} d[\boldsymbol{r}_2]\, W([\boldsymbol{r}_1],\ [\boldsymbol{r}_2]) \exp\Bigl(\frac{i}{\hbar}(S[\boldsymbol{r}_1]$$

$$-S[\boldsymbol{r}_2]\Big)\Big) \tag{11.9}$$

を得る。ここで

$$W([\boldsymbol{r}_1],\ [\boldsymbol{r}_2])=\int d\mu(\alpha)\,w_\alpha[\boldsymbol{r}_1]\,w_\alpha[\boldsymbol{r}_2] \tag{11.10}$$

である。

(11.9) 式は量子連続測定の径路積分理論での発展則が影響汎関数の理論で得られるもの ((11.4) 式を見よ) と一致することを示している。(11.10) 式は連続測定の RPI 理論の中で生じる影響汎関数の形を与える。考えている連続測定が座標 $\boldsymbol{r}$ のモニターであるとすれば，測定データは曲線 $[\boldsymbol{a}]$ によって表わされる。この種の測定を記述する重み汎関数はガウス型，

$$w_{[a]}[\boldsymbol{r}]=\exp\left(-\frac{2}{\varkappa}\int_0^T(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}(t))^2\mathrm{d}t\right) \tag{11.11}$$

にとることができる。この場合，影響汎関数は

$$W([\boldsymbol{r}_1],\ [\boldsymbol{r}_2])=\exp\left(-\frac{1}{\varkappa}\int_0^T(\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_1(t))^2\mathrm{d}t\right) \tag{11.12}$$

になることが示される。

これは測定の具体的なモデルによって得られた式 (11.6) と一致する。したがってそこで行った計算は，測定の径路積分理論でのもっと抽象的な考察を物理的にもっと見通しよく正当化したものと見ることができる。この考察は径路積分方法において測定を特徴づけるパラメーター $\varkappa$ に対して

$$\varkappa=\lambda^2\tau \tag{11.13}$$

を与える。前の節で考えたモデルによれば，λ は座標を測定するさいの誤差であり，τ は測定装置の慣性的性質を特徴づける時間のパラメーターである。

$\varkappa$ が定数であることは非常に重要である。その結果として密度行列は簡単な微分マスター方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial T}=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H,\ \rho]-\frac{1}{\varkappa}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2\rho \tag{11.14}$$

をみたす。

注意　1　$\varkappa$ が定数であることが測定される系の発展の正しい記述のために必要であることが第10章で強調された。しかし(11.11)式の素朴な解釈は

$$\varkappa=\Delta a^2 T \tag{11.15}$$

を与える。ここで Δa は測定の結果として径路 $[\boldsymbol{r}]$ が知られる精度を特徴づける。したがって，Δa^2 は時間 T に逆比例して変ることになる。以下でこの点について，測定される粒子の“加熱”の効果に関連して，コメントする。

H が自由粒子のハミルトニアンであるとすると，(11.14)式から，数学的な期待値に対して

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{M}\langle p\rangle,\quad \frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{1}{2M}\frac{\mathrm{d}\langle p^2\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{\hbar^2}{\varkappa M} \tag{11.16}$$

を得る。最後の式は運動量の分散が1次で増すことを示している。これは注意1で強調したことと完全に一致する。(11.15)式によれば，定数の $\varkappa$ に対しては Δa は $\sqrt{T}$ に逆比例するはずである。Δa の値は測定にもとづく座標の不確定と解釈することができる。すると，不確定性原理によって，運動量の不確定は $\sqrt{T}$ に比例することになる。このことは(11.16)の最後の式によって確かめられる。二つの不確定の積は $\hbar$ の程度の定数であることが容易に分かる。

自由粒子のエネルギーは運動量の2乗に比例する。したがって粒子のエネルギーも特性時間スケール

$$T_1=\frac{2E_0M\lambda^2\tau}{\hbar^2}$$

とともに線形に増加する。ここで E_0 は平均運動エネルギーの初期値である。

この問題を $\langle v\rangle$ が λ/τ より大きくなるような大きな時間のスケールに対して考えることは意味がないことを注意しておかなければならない。したが

って，T は $M\lambda^4/\tau\hbar^2$ よりも小さくなければならない。

11.5.2 情報原理

制限された径路積分 (RPI) 法は瞬間的な測定の系列からの極限過程によって正当化され，また，測定の具体的なモデルを考えることによってもっと物理的に正当化されることを見た。

(シュレーディンガー方程式にもとづく) ふつうの動力学的な方法に代えて，'無矛盾な歴史' の方法 (Griffiths 1984，Omnès 1990，Gell-Mann and Hartle 1990, Dowker and Halliwell 1992) を使って測定のモデルを扱うことができる。この方法は測定の過程に対する径路積分による記述を与える。しかしこの方法においても，測定する媒体 (環境) を具体的に考えなければならない。それに反して RPI 法では，測定する系でなく測定される系だけを具体的に考えればよい。

測定する媒体の影響がひそかに取り入れられているのはどうしてかという疑問が生じるのは自然である。この疑問に答えるようなふりはしないで (実際には答えられないので)，その現象をもっとよく理解するために，違う観点から論じよう (Mensky 1994 a をも見よ)。

まず一番はじめに，ファインマンが最初の論文 (Feynman 1948) で制限された径路積分を連続測定を記述するためのまったく自明な形式——特別な正当化を必要としない形式——として提唱していることを注意しよう。実際，この方法はファインマンの径路積分法の基本的な考え方の自然な帰結である。その '素朴な' 議論は以下のとおりである。径路は系の発展に対する**量子論的な可能事象**である。測定データと (すなわち，系についてのある**古典的な情報**と)両立しない径路は系を正しく記述するためには，積分から除かなければならない。

この議論は，連続および瞬間測定をどちらも一緒に考えると，もっと一般的な観点から見ることができる。RPI 法が連続測定に対してするのと同じ役割を，フォン・ノイマンの射影仮説は瞬間測定に対して行う。射影仮説によ

って瞬間測定を，測定装置を具体的に考えることなしに，正しく記述できることが知られている。二つの方法を比べると，どちらも次の性質を共有している：測定装置の動力学的な記述の代わりに情報による特徴づけを使う；すなわち，系についての測定によってどんな情報が与えられるかを指定する。この結論は次のように定式できる。

> フォン・ノイマンの射影仮説で量子瞬間測定を記述することとRPI法を連続測定に適用することとの経験は**情報による測定の特徴づけが十分である**ことを証明している。

このことは，測定装置(環境)のすべての(測定される系にとっての)本質的な性質は測定される系についてこの測定が与える情報によって決定されることを意味する。この情報による特徴づけ以外の計器(環境)のすべての性質は無視できる。測定の情報による特徴づけが測定される系へのその影響を決定するのに十分であるという意味でこれを**情報原理**と呼ぶこともできるだろう。

この原理の具体的な内容(とその適用のしかた)は確率振幅を用いて[7]自然に記述できる。標準的な方式は以下のとおりである。

・測定されていない量子系は**可能事象と対応する振幅**の組によって記述される。**瞬間測定**の場合には，これは波動関数(状態)を直交する波動関数の和(積分)に展開することによって行われる。**連続測定**の場合には遷移振幅を可能事象のチャネルに対応する振幅の和(積分)に展開しなければならない。それらは，例えば，系が1点から別の点へ遷移するための可能なチャネルとしてのファインマンの径路であってよい(しかしそうでなくてもよい)。(時間について伸ばされ空間について拡がった)連続測定の場合には可能事象は測定される対象(例えば量子場)の時空配位の集合に関係しているかも知れない。

[7] ふつうの情報理論のように確率を用いるのでなく。

- 情報原理の適用の第 2 段階は選ばれた可能事象による**測定の情報的記述**である[8]。それは，測定データのそれぞれはそのデータが与える情報と両立する可能事象の部分集合に結びついていることを意味する。

- 部分集合の中の振幅を加えると，この部分集合に対応する測定データに対する振幅が得られる[9]。同時にこの可能事象 (振幅) の部分集合への制限は測定を考慮に入れたときの系の状態あるいは動力学の記述を与える。

瞬間測定の場合にはこのやり方はフォン・ノイマンの射影仮説と同等な定式に導く。連続測定の場合には制限された径路積分 (RPI) 法が得られる。

非量子化あるいは非干渉化の現象の物理的記述をめざす多くの研究が最近の二•三十年の間に行われた (例えば，Zeh 1971，Zurek 1981，1982，Coldeira and Leggett 1983，Joos and Zeh 1985，Konetchnyi，Mensky and Namiot 1993 を見よ)。これらの研究は測定装置の具体的なモデルを避ける方法 (瞬間測定の場合のフォン・ノイマンの仮説と連続測定の場合の RPI 法) が正しい結果を (ある細部を別にして[10]) はるかに簡単に与えることを確かめた。

射影仮説について言えば，上記の著者たちはふつうそれを疑わず，この現象論的な方法の背後の物理的な原因を見出すことを望んだ。彼らは，波動関数の収縮のような過程のない，シュレーディンガー方程式によって完全に定式化される“均質な”量子力学を得ることを試みた。この研究は非常に有用であって測定される系と測定装置 (環境) との間の相互作用の深い理解に導いた。これはフォン・ノイマンの射影仮説を否定するものではなくてその背後の原因を明らかにするものである。

非量子化 (非干渉化) についての研究の後では射影仮説はいっそう驚くべき神秘的なものに見える。実際，系とその環境との間の相互作用の過程は，

---

[8] もちろん，可能事象の集合は考えている測定の記述にふさわしく選ばなければならない。

[9] 可能事象の部分集合の代わりに，それぞれの測定データに対して可能事象についてのなめらかな分布が与えられたとき，明らかな一般化が可能である。するとそのデータの振幅は重みをつけた和 (積分) によって与えられる。

[10] それらの細部でさえも，測定の情報的記述が十分であれば，現象論的方法の枠の中で得られるだろうと思われる。

必然的に膨大な数の自由度を含み散逸に導くので，それを考察するためには複雑で精緻なモデルを必要とする。この複雑さにもかかわらず，この過程の測定される系にだけ関係する（しかし環境には関係しない）面は非常に簡単でエレガントな射影仮説によって正しく記述される[11]ことが分かる。これは奇跡のように見える。制限された径路積分法についても同様なことが言える。これが先に情報原理という形で定式化した性質がほとんど自明であるにもかかわらず重要と思われる理由である。この原理が量子力学のいまはまだ十分明らかでないある深い面に関係していることを期待してもよいだろう。

11.5.3 開かれた量子系の RPI 理論

量子論の主なそして本当にエキサイティングな特徴は，その状態に影響することなしには，量子系のどんな測定（観測）も可能でないということである。これによって閉じた系という概念は実質的に無意味になり，開かれた（観測されている）系の理論が特に重要になる。

古典領域ではわれわれは閉じた系の理論をつくって，近似的に閉じていると考えられる系を実験的に研究することによって，この理論の予言を検証することができる。どんな系の観測（測定）も観測される系への観測の影響がいくらでも小さくなるようにすることができるから，そのような研究が可能である。そのため，観測される系はよい近似で閉じた系と考えることができるのである。

しかしこのことが可能なのは測定がある精度に達するまでに過ぎない。もしも測定の精度が系の作用，$S[q]$，がプランク定数，$\hbar$，よりも小さな誤差できめられるようなものであるとすると，古典論でなく量子論を使わなければならない。ところが量子論はどんな測定も測定される系に不可避的な反作用を生じることを予言する。したがって，**閉じた系は観測不能であり，観測可能な系を閉じた系と考えることはできない。**

これが量子領域で開かれた系の理論が特別に重要になる理由である。本当

[11] おそらくは，例えば非干渉化の時間のような，ふつう無視できるある細部を除いてそうである。

に閉じた系の理論は検証され得ないから役に立たない。

閉じた量子系の理論は，もちろん，広く応用されている。それを正しく行うには二つの方法がある：i）目的とする系と測定装置（環境）を一つの閉じた系と考える，あるいはii）現象論的な測定の量子論の枠組みで考え，観測される系への観測の影響を明示せずに取り入れる。一番目の方法は，環境の自由度について積分してしまえば，最後に目的とする部分系の理論を与える。この方法は，信頼度が高く見通しはよいが，経済的ではない。

二番目の方法（現象論的な測定の量子論）は観測（測定）の影響を取り入れるためのある（閉じた系の理論から見ると）余分な手続きと規則を提案する。よく知られた例はフォン・ノイマンの射影仮説と量子状態の収縮の概念である[12]。

現象論的な測定の量子論の枠組みの中で考えられている閉じた系が本当は閉じていないことは明らかである。環境の影響はこの場合明示せずに取り入れられる。それは開かれた系の有効理論である。

ふつうの測定の量子論が扱うのはごくたまに瞬間測定を（ふつうは最後の瞬間に1回だけの測定を）受ける閉じた系である。それぞれの時刻に何らかの観測（測定）を受けていると考えるほうがずっと現実的である。

このような状況を扱うのが**連続測定の量子論**である。この理論は，環境によって動力学が影響される，効率的な**開かれた系の理論**を与える。制限された径路積分（RPI）法はそのような型の現象論を与える。

開かれた（観測されている）系の RPI 理論は，多くの自由度を持つ環境を具体的に考えることを必要としないために，非常に経済的である。その上径路積分をすることさえもこの理論では（具体的には）必要でないことを思い出そう。われわれは量子動力学のどんな形式，たとえばシュレーディンガー方程式，を使うこともできる。ただし，元のラグランジァンに代えて（虚数項

[12] 測定の量子論は，しばしば，明示されずに使われている。そういう場合には，この理論のいくつかの規則（例えば行列要素から確率を見出す規則）が，測定の量子論を扱っていることをはっきり意識せずに，使われているのである。

を含む)有効ラグランジァンを使わなければならない(第4章の4.2節を見よ)。

RPI理論における開かれた系の発展は異なる測定(観測)データに対応する'部分'伝播子の集合によって記述される。その発展は古典的な面と量子的な面をどちらも持っている：その発展は伝播子あるいは発展作用素 U_α によって記述されるから量子的である；それらの'部分'発展作用素が，純粋に古典的性質を持ち振幅でなく確率によって特徴づけられる測定データ α によって印しづけられるところに，その発展の古典的性格が見られる。

11.5.4 径路積分の数学的定義

径路積分は量子論の新しい形式として Feynman (1948) によって提唱され，概念的な問題の解決にも具体的な計算にも有効であることが分かった。しかし数学的に見るとファインマン積分の定義には難点がある。ここでは，連続測定の理論に現われる制限された径路積分がこの点で優れていて，上記の難点の克服を可能にすることを論じる (Mensky 1992 d を見よ)。

ファインマン積分と物理学者が呼ぶものは，数学的に見れば，積分ですらない。すなわち，ファインマンの径路積分に導くような**測度**を導入することはでき**ない**。そうする代わりに物理の論文ではファインマン積分はふつうはある**極限過程**，例えば軌跡の断片化(第3章を見よ)，の助けを借りることによって定義される。

その理由はファインマン積分の被積分関数の中の指数

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]\right) \tag{11.17}$$

が(実数の作用 $S[q]$ に対して)一定の絶対値を持つことである。

$$\int\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]\right)F[q]\mathrm{d}[q] \tag{11.18}$$

の形のファインマン積分がある極限過程の助けを借りて(汎関数 $F[q]$ のあるクラスに対して)定義できる。しかしそれが可能なのは，(測度の理論で普

通なように）指数 (11.17) が減少するからではなくて，それが振動するからである。

事情は（量子統計において自然に現われる）ウイーナーの径路積分

$$\int \exp(-S[q])F[q]\mathrm{d}[q]$$

に対しては異なる。この場合には，積分は被積分関数の中に径路の空間の“無限遠点”で（作用 $S[q]$ が正で増大するために）減少する指数を含むために，測度が存在する。

測度が，ウイーナーの径路積分に対してだけでなく，ファインマンとウイーナーの中間の径路積分に対しても存在することは非常に重要である。そのような中間の径路積分は (11.18) の形に書くことができるが，ただし作用 $S[q]$ は虚部を持つ。作用の虚部がある形を持つならば，この部分の指数は積分するための測度を与え，実部の指数はその測度をもって積分される汎関数と考えることができる。これは複素作用の全部を持つ径路積分の収束を与える。

複素作用は Gel'fand and Yaglom (1956, 1960) に示唆されてファインマンの径路積分の定義に使われた。その方法は作用の虚部を導入してその作用に対応する測度を定義し，それから作用の虚部をゼロにするものだった。すなわち，ラグランジャンに $i\varepsilon[\dot{q}(t)]^2$ の形の虚部が導入され，それから極限 $\varepsilon\to 0$ が取られた。

ここで径路積分の制限は虚部を持つ有効作用を導入すること，

$$S[q]\to S_{\mathrm{eff}}=S[q]+\mathrm{i}A_\alpha[q],$$

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[q]\right)w_\alpha=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_{\mathrm{eff}}[q]\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(S[q]+\mathrm{i}A_\alpha[q])\right),$$

$$w_\alpha=\exp\left(-\frac{1}{\hbar}A_\alpha[q]\right),$$

と同等であることを思い出そう（第 4 章の 4.2 節を見よ）。したがって，量子連続測定の制限された径路積分 (RPI) 理論で扱われるのは，実際はファインマンのでなくファインマンとウイーナーの中間の径路積分である。その積分の収束はファインマンの径路積分の場合より良い。ある条件がみたされれば，

そのような制限された径路積分に対して測度が存在する。そのときその径路積分は数学的に正しく定義される。

測定は，必ずしも，量子系のある性質を見出すことを目的として準備されたものではないことを記憶しておく必要がある。系の軌跡についての何らかの情報が原理的に得られる可能性があるときには——その可能性がそれを目的として準備されたものであっても，あるいは，われわれの目的とは独立に存在するものであっても——いつでも，連続測定という事態が出現する。

実際には軌跡についての何らかの古典的な情報はいつでも存在しており，したがって何らかの連続測定がいつでも行われている。例えば1個の粒子についての実験がある実験装置によって行われるとすれば，粒子の位置は装置の大きさより大きくはない誤差をもって知られている。これは粒子の位置のモニター(あるいは少くとも制限)が行われていることを意味する。

現実の実験ではいつでも速度のモニターあるいは制限も行われていると言うこともできる。速度の限界は光速度，c，である。あるしきい値より上の速度に対しては質的に新しい現象が起こるときには，速度をもっと低く推定することができる。したがって現実的な状況ではいつでも径路積分に

$$w[q]=\exp\left(-\varepsilon\int[\dot{q}(t)]^2\right)$$

の形の重み汎関数を導入しなければならず，これはラグランジァンに余分な項 $i\hbar\varepsilon[\dot{q}(t)]^2$ を付け加えることに対応する。これは明らかにゲルファントとヤグロムの正規化に対応する。その上，ここでは極限操作 $\varepsilon\to 0$ は不必要で ε は有限な定数だから，事情はゲルファントとヤグロムの場合よりも良い。これによって径路積分は収束するようになるから，それに対して数学的に厳密な測度を導入することができる。

速度だけでなく加速度とあるいはさらに高次の座標の微分も同様に制限されるならば，さらに良い収束が得られるかも知れない。

この方法の正当化に戻って，11.5.3節を振り返ろう。そこでは，ファインマンの径路積分によって記述される閉じた系は観測不能な系という理想化さ

れ過ぎた状況に対応することが論じられた。観測可能な(および観測されている)系は開かれていて制限された径路積分によって記述しなければならない。したがって，上の議論を次のようにまとめることができる：径路積分を定義するさいの数学的困難は物理的な過理想化によって生じただけである。現実的な状況で現われるのは，いつでも，数学的困難を生じない制限された径路積分である。

11.5.5 RPI と無矛盾な歴史の方法

量子力学に対して最近提案された‘無矛盾な歴史’(consistent-history, CH)の方法(Griffiths 1984，Omnès 1990，Gell-Mann and Hartle 1990, Dowker and Halliwell 1992)はいくつかの点で制限された径路積分の方法に似ている。まず第1に，どちらの方法も可能事象として歴史あるいは径路の集合を使っている。[13]。しかし本質的な違いがある。この違いの元は CH が閉じた系を扱うのに対して RPI が開かれた系を扱うことにある。このことは RPI 法が CH 法から導ける理由をも説明する。このことを，RPI 法に近い言葉を使って，簡単に論じよう。

CH 法は(RPI 法と同じく)径路積分を径路のいろいろな部分集合 α(この方法では‘粗視化された歴史’と呼ばれる)に制限することによって生じる部分伝播子(それを W_α とする)を使う。RPI 法と違って，CH 法では閉じた(孤立した)系だけが扱われる。径路の部分集合 α は，CH 法では，それらが(近似的に)互いに‘干渉しない’ように選ばれる。ここではこの概念の正確な定義を与えないが，干渉しない部分集合 α は振幅 W_α によってだけでなく確率 $P_\alpha=|W_\alpha|^2$ によっても正しく特徴づけることができるので，可能事象の部分集合の確率はふつうの完全性の条件

$$\sum P_\alpha=1$$

[13] 上に引用した論文で定義された歴史とファインマンの径路との間には技術的に違いがある。この違いは原理的なものではないので，どちらの方法も歴史あるいは径路によって定式化できる。

[14] RPI 法では一般の場合には部分集合 α の非干渉性を要求しなければならないことはない。非干渉化は‘測定の古典領域’においてのみ起こる。

をみたすことを注意しよう[14]。干渉しない部分集合（あるいは‘粗視化された歴史’）は系の可能な古典的軌跡を生じる。

もしわれわれの目的が測定の（CH 法の枠内での）記述であるならば，考えている閉じた系は複合的であって二つの部分——測定される系Sと測定する系M——から成っている。それぞれの径路は，qとQをSとMの座標として，複合系の配位空間での径路$[q, Q]$である。測定の場合に特徴的なのは，部分集合αの非干渉化が系Mが巨視的であることによって，すなわち，$[q]$でなく径路$[Q]$の性質によって与えれることである。

この同じ場合を系Sの径路$[q]$だけで表わすことを試みよう。すると可能事象αは径路$[q]$の部分集合として記述されなければならないが，それらの可能事象を特徴づける性質は$[q, Q]=[q][Q]$によって決定されるはずである。それによって，たとえ径路$[q]$の部分集合が（系Sの動力学的性質に関しては）非干渉化していなくても，（対応する径路$[q, Q]$の部分集合が系$S+M$に関しては非干渉化していて）それらに正しく確率を付与することができる。ある条件の下で，それらの確率が系Sの部分伝播子U_αの絶対値の 2 乗に等しいこと，$P_\alpha=|U_\alpha|^2$，を証明することができる。こうして測定という状況において，RPI 法の特徴的な点が CH 法から導かれる。

*11.6　新しい応用の概観

この節では RPI 法の（ウンルー効果と量子カオスへの）二つの応用の短い概観を与える。それらはこの本の英語版が発行された後で行われたものである。できるだけ詳細に立ち入らないようにする。

11.6.1　ウンルー効果における局在化

よく知られたウンルー効果（Unruh 1976 を見よ）では，質量のない粒子を検出することができる一様に加速された粒子検出器はミンコフスキー真空の

* この節は日本語版の作成に当って著者が追加したものである（訳者）。

中を動くとき励起される。それはあたかも熱浴の中に突っ込まれたように振舞う。検出器の励起には粒子の放出がともない，したがって，場の終状態が真空ではないことをウンルーは認めた。この過程は Unruh and Wald (1984) によってさらに詳しく論じられた (Ginzburg and Frolov 1987 をも見よ)。

ウンルー効果の取り扱いは上に引用したものもその他のものも，すべて，入射状態と射出状態の方法にもとづいている。検出器と検出される粒子を記述する量子場との初状態は無限の過去に準備されたと仮定され，終状態は無限の未来において評価される。その中間では内部の相互作用を含むそれぞれのハミルトン作用素に従がう時間についての乱されない干渉可能な発展が考えられている。したがって，検出器と場とはその全歴史を通じて相互の間でだけ相互作用するとされ，両方で一つの**閉じた複合系**を作っている。

Audretsch, Mensky and Müller (1994) の論文でウンルー過程における非量子化 (非干渉化) の現象が考察されている。粒子検出器は 2 準位系として記述され，その量子化された場 (粒子) との相互作用のほかに，非干渉化させる環境との相互作用も考慮に入れられる。それは RPI 法と同様なやり方で現象論的に行われる。こうして，このモデルでは検出器と場との複合系は環境によって観測される**開かれた系**として記述される。

このモデルでは連続測定は，連続な径路によってではなく，非干渉化時間 Δt_d (環境と一緒にある検出器の不活性を特徴づけるパラメーター) に等しい有限な時間間隔だけ離れた射影作用素 (瞬間測定) の連鎖によって表わされる。準位間エネルギー差が E の 2 準位検出器に対しては，検出器が有効な作動をする非干渉化時間 Δt_d は $\hbar/E$ の程度かそれより大きくなければならない。

非干渉化を考慮するこのモデルではウンルー過程で起こるすべての現象の時空的局在化を正しく考えることができる。特に，検出器が励起される時空領域とそれにともなう過程において粒子が生成する領域とは，非干渉化時間 Δt_d による精度で，示すことができる。1 番目の領域の中心は検出器が動く双曲線上のある点にある。この双曲線は，装置の加速度を a とするとパラメー

ターを使って

$$ct=\frac{1}{a}\sinh a\eta, \quad x=\frac{1}{a}\cosh a\eta$$

によって与えられる。

2番目の領域の中心は原点に対して1番目の中心と対称な時空点である。二つの領域は因果的に結びついてはいないが，これらの領域の出来事は互いに相関している。しかしその相関は因果律を破らない。この型の相関はUnruh and Wald (1984) の論文に論じられている。(非干渉化は考えに入っていないので) その論文では局在化は考えられなかったが，ミンコフスキー (t, x) 平面の右半分で一つの出来事が起こり，もう一つが左半分で起こることに対して振幅がゼロでないことが示された。

11.6.2 古典カオスと量子カオス

連続測定に対するRPI法では量子系は軌跡によって表わされる。これは**量子カオス**の問題への，すなわち，古典領域でカオス的に振舞う量子系の振舞いの研究への，この方法の自然な適用を与える。そのような応用はMensky (1994 b) の論文で考察された。

カオス的な系 (すなわち，決定論的カオスを示す系) の特徴的な様子は軌跡によって自然に表わされる：そのような系の軌跡は，初期条件への依存が指数的不安定性を持つために，複雑でカオス的になる (例えば Zaslavsky 1984を見よ)。ふつうの量子力学では波動関数というまったく違う言葉が使われる。この言葉の違いは避けられないと，ふつう，主張されている。量子カオスの問題は，ふつう，カオス的な古典系を量子化することによって得られる量子系の特徴的な振舞い (例えばスペクトルの奇妙さ) を研究することとして定式されている (Zaslavsky 1984, Casati et al. 1979, Chirikov et al. 1981)。

Mensky (1994 b) の論文では量子連続測定のRPI理論が力学系の古典的性質と量子的性質の両方を軌跡によって，すなわち，同一の言葉で研究する

ことに適用されている。

問題を別の観点から眺めて，実験家がどのようにして決定論的なカオスを観測することができるのかを問題にしてもよい。

明らかに，軌跡 $[a]=\{a(t)|0\leqq t\leqq T\}$ を得るためには実験家は系のオブザーバブル A を (十分に長い時間)モニターしなければならない。それから彼はこの軌跡の統計的性質を分析する。実験家が系の (時間について伸ばされた) 連続測定をすることから始めることが，われわれにとって，重要である。

ところが，量子系のどんな測定も系の状態を乱す。その結果，連続測定を受けている系の発展は古典法則では記述できない。それではどうして (そしてどんな条件の下で) 決定論的カオスあるいは古典軌跡のカオス的性格と言ってよいのだろうか？古典軌跡 (および特にカオス的軌跡) は現実との関係を，そもそも，持っているのだろうか？どんな時にこれらの軌跡を使うことが正当なのか？カオスの理論に対して，力学系の量子的性格から出てくる補正はどんなものか？量子連続測定の量子論は軌跡を使って定式化されているので，これを使って以上の質問に答えることができる。

もちろん，古典論とくに古典カオス理論は系を古典的と考えられるような広い範囲の条件の下で適用できる。しかしこれは近似に過ぎない。厳密に言えば，どんな系も量子的である。どんな時に古典近似が適用できるかをはっきり理解することは重要である。

この本のこれまでの章でわれわれは，量子系の位置のモニターを研究して，十分に粗雑な測定 (‘広い帯’) に対しては測定の古典領域が生じ，一方，精密な測定 (‘狭い帯’) においては量子領域が実現されることを見た。**古典領域では**測定データとして生じる軌跡は古典法則に従がう。カオス的な系ではこれはカオス的な軌道を生じる。**量子領域では**測定から生じる軌跡は古典軌跡と違い，そのズレはカオス的である。したがって量子カオス (ここでは軌跡のカオスとして理解される) は古典的には規則的な系に対しても生じ得る。

しかしこれは必ず生じるわけではない。量子領域をまったく持たないような系のクラス (いわゆる量子非破壊，QND 系) が存在する。したがって，QND

系に対しては**量子カオスは存在しない**，QND 系に対しては**古典カオスも存在しない**ことがわかる。もっと正確に言えば，どんな系にもいくつかの非 QND 変数があるのだから，(QND 系と言わないで) QND 変数と言わなければならない。

Mensky (1994 b) の論文に示されたことをまとめると，軌跡 (モニターのデータ) の振舞いに関してすべてのオブザーバブルは三つのクラスに分けられる：i) 量子非破壊 (QND)，ii) 量子破壊 (QD)，およびiii) 強量子破壊 (SQD) あるいはカオス的。QND オブザーバブルは測定のすべての領域において規則的に振舞い[15]，SQD オブザーバブルはすべての領域においてカオス的であり，それに対して，QD オブザーバブルは測定の古典領域においては規則的で量子領域ではカオス的である。これは表 11.1 に示してある。

	古典領域	量子領域
QND	規則的	———
QD	規則的	カオス的
SQD	カオス的	カオス的

表 11.1 異なる型のオブザーバブルは観測の古典領域と量子領域で規則的あるいはカオス的振舞いを示す。

注意 2 10 年ほど前，文献で考察されたオブザーバブルは，事実上，すべてが (調和振動子あるいは非調和振動子の座標のような) 量子破壊 (QD) オブザーバブルだった。決定論的なカオスが発見され研究されている現在では，ほとんどのオブザーバブルがカオス的 (SQD) であることが明らかである。現実の系のオブザーバブルのあるものはその値が限られた領域内にあるときにだけ規則的と考えられる (QD)。QND 領域は非常に小さな領域でしか現われない[16]。QND をかなり広い領域で与えるには特別な努力が必要となる。

---

[15] この場合，どんなに精密な測定に対しても量子領域は生じない。

[16] 一つの明らかな例は，系を相互作用していない調和振動子の集まりとして近似できるときの，平衡点のまわりの系の微小振動である。

参考文献

Accardi L 1981 *Phys. Rep.* **77** 169

Accardi L 1984 Some trends and problems in quantum probability *Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Processes ed* L Accardi *et al* (*Springer Lecture Notes in Mathematics 1055*) (Berlin : Springer) p 1

Adachi S, Toda M and Ikeda K 1989 *J. Phys. A : Math. Gen.* **22** 3291

Anderson A and Anderson S B 1990 *Ann. Phys., NY* **199** 155

Audretsch J, Mensky M B and Müller R 1994 Decoherence and Localization in Unruh effect (to be published)

Barchielli A, Lanz L and Prosperi G M 1982 *Nuovo Cimento* B **72** 79

Bergmann P G and Smith G J 1982 *Gen. Rel. Grav.* **14** 1131

Bialynicki-Birula I 1963 *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys.* **11** 135

Bin Kang Cheng 1989 *Phys. Lett.* **135A** 70

Bloch I and Burba D A 1974 *Phys. Rev.* D **10** 3206

Blokhintsev D 1982 *Space and Time in Microworld* (Moscow : Nauka) (in Russian)

Blokhintsev D 1987 *Principal Questions of Quantum Mechanics* (Moscow : Nauka) (in Russian)

Bohm D 1952 *Quantum Theory* (Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall)

Bohr N and Rosenfeld L 1933 *K. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Meddr. 12* N8 3-65

Borzeszkowski H-H von and Mensky M B 1994 Phys. Lett. A **188** 249

Braginsky V B 1967 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53** 1434

Braginsky V B 1977 *Topics in Theoretical and Experimental Gravitation Physics* ed V DeSabbata and J Weber (New York : Plenum) p 105

Braginsky V B and Vorontsov Yu I 1974 *Usp. Fiz. Nauk* **114** 41 (1975 *Sov. Phys. Usp.* **17** 644)

Braginsky V B, Vorontsov Yu I and Khalili F Ya 1977 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **73** 1340

Braginsky V B, Vorontsov Yu I and Khalili F Ya 1978 *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **27** 296

Braginsky V B, Vorontsov Yu I and Thorne K S 1980 *Science* **209** 547

Busch P, Casinelli G and Lahti P J 1990 *Found. Phys.* **20** 757

Busch P and Lahti P J 1990 *Ann. Phys., Lpz.* **47** 369

Caldeira A O and Leggett A J 1983 *Phisica A* **121** 587
Calzetta E 1989 *Phys. Rev.* D **40** 380
Casati G, Chirikov B V, Izrailev F M and Ford J 1979 Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems ed G Casati and J Ford (New York : Springer) p 334
Castagnino M A 1988 The appearance of time in quantum gravity *Quantum Gravity* (*Proc. 4th Seminar on Quantum Gravity, Moscow, 25-29 May 1987*) ed M A Markov, V A Berezin and V P Frolov (Singapore : World Scientific) p 269
Castrigiano D P L and Mutze U 1984 *Phys. Rev.* A **30** 2210
Caves C M *et al 1980 Rev. Mod. Phys.* **52** 341
Caves C M 1983 *Quantum Optics, Experimental Gravity and Measurement Theory* ed P Meystre and M O Scully (New York : Plenum) p 567
Caves C M 1985 *Phys. Rev. Lett.***54** 2465
Caves C M 1986 *Phys. Rev.* D **33** 1643
Caves C M 1987 *Phys. Rev.* D **35** 1815
Chirikov B V, Izrailev F M and Shepelyansky D L 1981 *Sov. Sci. Rev.* C **2** 209
Chiu C B, Sudarshan E C G and Misra B 1977 *Phys. Rev.* D **16** 520
Cook R J 1988 *Phys. Scr.* **T21** 49
Davies E B 1976 *Quantum Theory of Open Systems* (London : Academic)
d'Espagnat B 1976 *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics* 2nd edn (Reading, MA : Addison-Wesley, Benjamin)
d'Espagnat B 1983 *In Search of Reality* (New York : Springer)
DeWitt B S 1964 Dynamical theory of groups and fields *Relativity Groups and Topology* (London : Blackie) p 598
DeWitt B S 1967 *Phys. Rev.* **160** 1113
DeWitt B S and Graham N 1973 *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton, NJ : Princeton University Press)
Dirac P A M 1958 *Principles of Quantum Mechanics* (Oxford : Clarendon)
Dirac P A M 1972 *Fields and Quanta* **3** 139
Dowker H F and Halliwell J J 1992 *Phys. Rev.* D **46** 1580
Duru I H 1984 *Phys. Rev.* D **30** 2121
Duru I H and Kleinert H 1982 *Fortschr. Phys.* **30** 401
Everett H III 1957 *Rev. Mod. Phys.* **29** 454
Feynman R P 1948 *Rev. Mod. Phys.* **20** 367
Feynman R P and Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York : McGraw-Hill)
Fukuda R 1987 *Phys. Rev.* A **35** 8 ; **36** 3023
Gel'fand I M and Yaglom A M 1956 Usp. Mat. Nauk 11 77
Gel'fand I M and Yaglom A M 1960 J. Math Phys. 1 48
Gell-Mann M and Hartle J B 1990 *Complexity, Entropy, and the Physics of*

Information, SFI Studies in the Sciences of Complexity vol VIII, ed W Zurek (Reading, MA : Addison Wesley) or see *Proc. 3rd Int. Symp. on the Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology* ed S Kobayashi *et al* (Tokyo : Physical Society of Japan)

Ghirardi G C, Omero C, Weber T and Rimini A 1979 *Nuovo Cimento A* **52** 421

Ghiradi G C, Rimini A and Weber T 1988 *Found. Phys.* **18** 1

Ginzburg V L and Frolov V P 1987 Sov. Phys.Usp. **30** 1073

Golubtsova G A and Mensky M B 1989 *Int. J. Mod. Phys.* A **4** 2733

Griffiths R B 1984. *J. Stat. Phys.* **36** 219

Grishchuk L P 1989 *Quantum Effects in Cosmology, Lectures presented to VI Brazilian School on Cosmology and Gravitation, Rio de Janeiro, July 1989*

Grosche C 1989 *J. Phys. A : Math. Gen.* **22** 5073

Halliwell J J 1988 *Phys. Rev.* D **38** 2468

Halliwell J J 1989 *Phys. Rev.* D **39** 2912

Halliwell J J and Hawking S W 1985 *Phys. Rev.* D **31** 1777

Hartle J B 1988 *Rhys. Rev.* D **38** 2985

Hartle J B and Hawking S W 1983 *Phys. Rev.* D **28** 2960

Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York : Academic)

Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam : North-Holland)

Home D and Whitaker M A B 1986 *J. Phys. A : Math. Gen.* **19** 1847

Itano W M, Heinzen D J, Bollinger J J and Wineland D J 1990 *Phys. Rev.* A **41** 2295

Itzykson C and Zuber J-B 1980 *Quantum Field Theory* (New York : McGraw-Hill)

Joos E 1984 *Phys. Rev.* D **29** 1626

Joos E 1986 *Phys. Lett.* **116A** 6

Joos E and Zeh H D 1985 *Z. Phys.* B **59** 223

Kac M 1958 *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (New York : Interscience)

Kaempffer F A 1965 *Concepts in Quantum Mechanics* (Nwe York : Academic)

Khalili F Ya 1981 *Vestnik Mosk. Universiteta, Ser. 3, Phys. Astron.* **22** 37

Kiefer C 1987 *Class. Quantum Grav.* **4** 1369

Klauder J R 1987 *Recent Developments in Mathematical Physics* (*Proc. 26th Int. Universitätswochen Kernphys., Schladming, 17-27 February 1987*) Berlin, p 80

Konetchnyi A, Mensky M and Namiot V 1993 *Phys. Lett.* **A 177** 283

Kraus K 1981 *Found. Phys.* **11** 547

Kraus K 1983 *States, Effects and Operations* (Berlin : Springer)

Landau L D and Lifshits E M 1958 *Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory*

(Oxford : Pergamon)
Landau L and Peierls R 1931 *Z. Phys.* **69** 65
Larsen U 1986 *Phys. Lett.* **114A** 359
Machida S and Namiki M 1980 *Prog. Theor. Phys.* **63** 1457, 1833
Machida S and Namiki M 1984 *Proc. Int Symp. on Foundations of Quantum Mechanics* ed S Kamefuchi *et al* (Tokyo : Physical Society of Japan) pp 127, 136
Maki Z 1988 *Prog. Theor. Phys.* **79** 313
Mandelstam S 1962 *Ann. Phys., NY* **19** 1
Martens H and de Muynck W 1990 *Found. Phys.* **20** 257 355
Mensky M B 1976 *Induced Representations Method : Space-Time and Concept of Particles* (Moscow : Nauka) (in Russian)
Mensky M B 1979a *Phys. Rev.* D **20** 384
Mensky M B 1979b *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **77** 1326 (Engl. transl. 1979 *Sov. Phys.-JETP* **50** 667)
Mensky M B 1983a *The Path Group : Measurements, Fields, Particles* (Moscow : Nauka) (in Russian ; Japanese translation Kyoto : Yosioka, 1988)
Mensky M B 1983b *Teor. Mat. Fiz.* **57** 217
Mensky M B 1985a On quantum theory of measurements of gravitational field *Proc. 3rd Seminar on Quantum Gravity, Moscow, 23-25 October 1984* ed M A Markov, V A Berezin and V P Frolov (Singapore : World Scientific) p 188
Mensky M B 1985b A group-theoretical approach to a path integral *Group Theoretical Methods in Physics* (*Proc. 2nd Int. Seminar, Zvenigorod, 24-26 November 1982*) vol 1, ed M A Markov, V I Man'ko and A E Shabad (London : Harwood) pp 613-30
Mensky M B 1988a *Theor. Math. Phys.* **75** 357
Mensky M B 1988b *Ann. Phys., Lpz.* **45** 215
Mensky M B 1989 *Theor. Math. Phys.* **80** 689
Mensky M B 1990a Class. Quantum Grav. **7** 2317
Mensky M B 1990b *Phys. Lett.* **150A** 331
Mensky M B 1990c Application of the path group in gauge theory, gravitation and string theoty *Gauge Theories of Fundamental Interactions* (*Proc. XXXII Semester in Banach Int. Math. Center, Warsaw, 1988*) (Singapore : World Scientific) p 395
Mensky M B 1991 *Phys. Lett.* **155A** 229
Mensky M B 1992a *Phys. Lett.* **162A** 219
Mensky M B 1992b *Found. Phys.* **22** 1173
Mensky M B 1992c *Phys. Lett.* **169A** 403
Mensky M B 1992d *Teor. Mat. Fiz.* **93** 264
Mensky M B 1993 in : *Quantum Control and Measurement,* H. Ezawa and Y. Murayama (Eds.), Elsevier Science Publishers B .V., p. 81

Mensky M B 1994a Restricted path integrals for open quantum systems, in: *Quantum Physics, Chaos Theory, and Cosmology,* American Institute of Physics (to be published)
Mensky M B 1994b Classical and quantum chaos from continuous quantum measurments, Preprint KONS-RGKU-93-13 (Relativity Group, Konstanz University), to be published in "Solitons, Chaos & Fractals"
Mensky M B, Onofrio R and Presilla C 1991 Phys. Lett. **161 A** 236
Mensky M B. Onofrio R and Presilla C 1993 Phys. Rev. Lett. **70** 2825
Miller W A and Wheeler J A 1984 *Proc. Int. Symp. on Foundations of Quantum Mechanics* ed S Kamefuchi *et al* (Tokyo: Physical Society of Japan) p 140
Misra B and Sudarshan E C G 1977 *J. Math. phys.* **18** 756
Morette-DeWitt C 1972 *Commun. Math. Phys* **28** 47
Namiki M and Pascazio S 1991 *Phys.* A **44** 39
Newton T and Wigner E P 1949 *Rev. Mod. Phys.* **21** 400
Omnès R 1990 Ann. Phys. (N.Y.) **201** 354
Padmanabhan T 1989 *Phys. Rev.* D **39** 2924
Peres A 1980a *Am. J. Phys.* **48** 931
Peres A 1980b *Phys. Rev.* D **22** 879
Petrosky T, Tasaki S and Prigogine I 1990 *Phys. Lett.* **151A** 109
Piron C 1976 *Foundations of Quantum Mechanics* (Reading, MA :Benjamin)
Presilla C 1990 *Doctoral Thesis* University of Rome (unpublished)
Presilla C, Jona-Lasinio G and Capasso F 1991 *Phys. Rev.* B **43** 5200
Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A and Vetterling W T 1986 *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing* (Cambridge: Cambridge University Press)
Rietdijk C W 1987 *Found. Phys.* **17** 297
Rosenfeld L 1966 *Entstehung, Entwicklung und Perspectiven der Einsteinschen Gravitationstheorie* ed H-J Treder)Berlin: Akademie-Verlag)
Shepelyansky D L 1983 *Physica* D **8** 208
Song S, Caves C M and Yurke B 1990 *Phys. Rev.* **A 41** 5261
Squires E J 1988 *Found. Phys. Lett.* **1** 13
Thorne K S, Drever R W P, Caves C M, Zimmermann M and Sandberg V D 1978 *Phys. Rev. Lett.* **40** 667
Unruh W G 1976 Phys. Rev. D **14** 870
Unruh W G 1979 *Phys. Rev.* D **19** 2888
Unruh W G 1989 *Phys. Rev.* D **40** 1048
Unruh W G and Wald R M 1984 Phys. Rev. D **29** 1047
Unruh W G and Zurek W H 1989 *Phys. Rev.* D **40** 1071
von Borzeszkowski H-H 1982 *Found. Phys.* **12** 633
von Borzeszkowski H-H and Treder H-J 1988 *The Meaning of Quantum Gravity* (Dordrecht: Reidel)

von Neumann J 1932 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin: Springer) (Engl. transl.: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1955)

Vorontsov Yu I 1981 *Usp. Fiz. Nauk* **133** 351

Walls D F, Collet M J and Millburn G J 1985 *Phys. Rev.* D **32** 3208

Wheeler J A 1957 *Rev. Mod. Phys.* **29** 463

Wheeler J A 1968 Superspace and the nature of quantum geometrodynamics *Battelle Rencontres* ed C DeWitt and J A Wheeler (Reading, MA: Benjamin)

Wightman A S 1962 *Rev. Mod. Phys.* **34** 845

Wigner E P 1939 *Ann. Math.* **40** 149

Wigner E P 1968 *Am. J. Phys.* **38** 1005

Zaslavsky G M 1984 *Stochasticity of Dynamical Systems* (Moscow: Nauka Publishers)

Zeh H D 1971 On the irreversibility of time and observation in quantum theory. *Enrico Fermi School of Physics* **IL,** Academic Press, p. 263

Zeh H D 1986 *Phys. Lett.* **116A** 9

Zeh H D 1988a *Found. Phys.* **18** 723

Zeh H D 1988b *Phys. Lett.* **126A** 311

Zeh H D 1992 *The Physical Basis of The Direction of Time,* Second Edition, Berlin: Springer

Zimânyi G T and Vladâr K 1986 *Phys. Rev.* A **34** 3496

Zurek W H 1981 *Phys. Rev.* D **24** 1516

Zurek W H 1982 *Phys. Rev.* D **26** 1862

訳者あとがき

本書は Michael B. Mensky, “Continuous Quantum Measurements and Path Integrals”, Institute of Physics Publishing Ltd., Bristol and Philadelphia, 1993
の訳であるが，著者が「日本語版への序文」で述べているように，新たな三つの節を含めて，かなりの追加と修正がされている。また文献も 18 点追加されている。

本書の内容の大半は著者自身の研究に基づいており，それは量子測定の問題（電磁場や重力場の測定，宇宙の自己測定を含む）に広く便利に使える方式であって，また，量子論の基本問題（状態の収縮，フォン・ノイマンの射影仮説・不確定性関係など）にも新たな角度から光を投げかける。原理の形にまでまとめられたものは第 9 章の“作用不確定性原理”と日本語版で追加された 11.5 節の“情報原理”である。宇宙の初期の発展，とくに時間の発生，などを含む量子系から古典系への発展は，現在，急速に研究が進められている問題であるが，本書の方法はそのための有力な方法の一つである。

本書はかなり読みやすいように工夫されていて，ほとんどの章はそこから読み始めても，必要に応じて参照してある箇所を見れば，読めるようになっている。また，内容のレベルは高いが，予備知識として要求されるのは，簡単な微積分と量子力学の基礎的な知識だけである。

訳者の希望に応じて多くの追加と修正を行ってくれた著者に深く感謝する。また吉岡書店の上川正二氏には，終始，たいへんお世話になった。あわせて謝意を表したい。

1995 年 4 月

訳　　　者

索　　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ISBN 4-8427-0000-9

訳者略歴

町田　茂（まちだ　しげる）

1949年　東京大学理学部卒業

1966～1989年　京都大学理学部教授

1989年　京都大学名誉教授

理学博士

M.B. Mensky：量子連続測定と径路積分　1995 ©

1995年5月25日　第1刷発行

訳　者　町　田　　茂

発行者　吉　岡　　誠

〒606 京都市左京区田中門前町 87

株式会社　吉　岡　書　店

電話(075)781-4747/振替　01030-8-4624

印刷・製本㈱太洋社

ISBN 4-8427-0254-0

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれている．この時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物　理　学　叢　書

編集・小谷正雄／小林　稔／井上　健／山本常信／高木修二

第 1 期

フェルミ　小林　稔他訳 **原子核物理学** 408頁	本書は著者の講義に補正を加えられたものであり，実験・理論両方面にわたって原子核の基礎知識の全ぼうが要領よくまとめられている．内容の新鮮さ力強さに著者の個性が表われている．
シッフ　井上　健訳 **新版 量子力学** 上下 上 368頁　下 320頁	刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．
ガーネイ　山本常信訳 **統計力学序論** 320頁	基本的応用例・グラフとともに平易な言葉で，一つ一つの分子の振舞が目に見えるように語られていくのは，本書の独壇場である．種々の角度から初等的に説明することにより，高度に至る方法を取っている．
ショックレイ　川村　肇訳 **半導体物理学** 上下 上 400頁　下 248頁	程度の高い専門書であると同時に，急速に実用化したトランジスターを扱う技術者のための啓蒙書でもある．著者の生々しい情熱が紙面に満ちている．
ハイトラー　沢田克郎訳 **輻射の量子論** 上下 上 304頁　下 248頁	古典電滋気，相対論，光の量子化，物質と光の相互作用と，光に関した事を理論，応用両面から初学者には平易に，研究者には文献たるよう配慮された．

第 2 期

ゴールドスタイン　瀬川富士他訳 **新版 古典力学** 上・下 上 528頁　下416頁	最近，物性物理や素粒子物理を学ぶ人の間に，古典力学はきちんと学ぶべきだという気持が強い．本書は，場の理論から，多体系の物理学を研究する上で，基本的な入門書であり，古典力学を新しい見地から解説．
リープマン，ロシュコ　玉田　珖訳 **気体力学** 512頁	高速流体力学の基礎をできるだけ物理的に記述し，流体運動と流体の物性との結びつきの理解へと読者を導き，反応性気流や稀薄気体の流れなど最近の問題にも適応するすぐれた教科書である．
フレーリッヒ　永宮健夫・中井祥夫訳 **誘電体論** 240頁	誘電率の意味を熱力学的，統計力学的にとらえ，個々の分子の双極子能率と誘電率より固体，気体，溶液などの誘電的性質を統一的観点から記述され，本質を簡潔，かつ完璧にまとめられている．
モット，マッセイ　高柳和夫他訳 **新版 衝突の理論** (全4巻)上Ⅰ・292頁　上・Ⅱ328頁 下Ⅰ・312頁　下・Ⅱ232頁	量子力学の重要な適用対象である衝突理論を丁寧に述べた代表的教科書である．衝突の一般論と，電子衝突，原子と原子の衝突，さらに原子核による核子の散乱など多くの実際問題を扱っている．
パノフスキー，フイリップス林忠四郎他訳 **新版 電磁気学** 上・下 上 288頁　下 296頁	実験物理学，物性理論，素粒子論などを専攻する学生から無比の教科書といわれた旧版を改良し，新しい内容を追加した新版は，電磁気学の教科書として最良のものである．

第 3 期

アイリング他　平井西夫・長谷川繁夫訳 **絶対反応速度論** 上・下 上 328頁　下 352頁	分子反応速度論の不朽の名著である本書は，今なお新しい分野を開拓するための手掛りを与えてくれる．化学者のみならず，物理学者，生物学者にとって必読の書であり，反応速度を計算で予測する第一歩を示した．
アブラガム　富田和久・田中基之訳 **核の磁性** 上・下 上 336頁　下 416頁	核の磁性を利用すれば凝縮相の局所的状況について新たに様々の詳細が知られる．また実験結果の理論的解釈は統計力学を新しい領域に導いた．その転機に立つユニークな解説書である．
サウレス　松原武生訳 **新版 多体系の量子力学** 296頁	多体問題全体について統一的視点を得るための絶好の入門書．第一版を大幅に改訂し新しい発展が追補された．基本的な事項の簡潔で要領よい記述と，豊富な文献は初学者にも有用である．
ロッシ　中井祥夫他訳 **光学** (合本)568頁	光の波動モデルの立場で基本的な物理概念を啓蒙的に解説した教科書．ホイヘンスの原理が懇切に記述されており，光波の発生も直観的に理解できるよう充分配慮されている．
ウイグナー　森田正人・森田玲子訳 **群論と量子力学** 464頁	原子スペクトルに関する群論の応用を初学者にも理解しやすく平易に解説．最近の原子・原子核・素粒子論に用いるラカー代数や，時間反転まで記述され，ノーベル賞授賞の著者の業績を窺い知れる．

第 4 期

イーゲルスタッフ　　廣池和夫・守田　徹訳 **液体論入門** 288頁	液体の物理的諸現象を理論と実験の両面から捕えた好著である.対象とする液体に金属液体が含まれていること，液体の動的性質も詳しく議論されていることが大きな特徴であり，この分野では稀少な良書である.
セグレ　　真田順平・三雲　昂訳 **原子核と素粒子** 上下 上 480頁　下 448頁	原子核と素粒子を縦横に研究したノーベル物理学者が，実験装置の解説から，それをどのように用いて結果が得られたか，その意味する理論的解釈までを徹底させた好個の入門書である.
パインズ　　大槻義彦・三沢節夫訳 **固体における素励起** ──フォノン・エレクトロン・プラズモンの物理──　320頁	著者によって発展された量子プラズモンの理論は，物性の分野はもとより，宇宙物理・核物理・生物物理などにもとりいれられ，多くの成果を生みつつある．本書はパインズが基礎から説き起こす名講義の教科書.
ロッジ　　倉田道夫・尾崎邦宏訳 **弾性液体** ──大変形レオロジー入門──　456頁	粘弾性とくに非線形粘弾性の理論を，分りやすく解説した名著．ベクトル解析の初歩からレオロジー状態方程式の構成まで，適切な演習問題が与えてあり，また次の段階へ進む用意がなたれ，独習に適している.
フィリップス　　川村肇校閲・小松原毅一訳 **半導体結合論** ──bonds and bands in semiconductors──　384頁	従来の電子論的立場でなく，微視的な荷電子結合を重視して，半導体物理とその応用面を統一的に記述．今後の半導体研究が，工業技術の発展を含めて，当然指向しなければならない方向と指針を与える.
ライフ　　中山寿夫・小林祐次訳 **統計熱物理学の基礎** 上中下 上 388頁　中 352頁　下 248頁	統計力学の基礎概念から応用まで体系的に取扱い，初心者が容易に理解できるよう豊富な例題を駆使して懇切丁寧に解説した学部学生向き教科書の決定版．化学・生物の学生にも理解し易い記述である.

第 5 期

キャレン　　山本常信・小田垣孝訳 **熱力学** 上下 上 248頁　下 216頁	この教科書は従来の歴史的発展に沿った記述を取らず，いくつかの公理に基づいて熱力学を再構築し，論理構造を明確にした．今後の熱力学の発展と飛躍のためにこのようた安定化のもつ意義は深い.
ハーケン　　松原武生・村尾　剛訳 **固体の場の量子論** 上下 ──素励起物理学入門──　上 168頁　下 232頁	教養程度の知識のみで，短期間に系統的に場の量子論の方法と固体論への応用を完全に習得できる．上巻では多くの演習問題で理解を早め，下巻では現在の考え方・モデル・方法などが整然と解説されている.
アシュクロフト，マーミン　松原武生・町田一成訳 **固体物理の基礎** (全 4 巻)　上・Ⅰ 304頁　下・Ⅰ 288頁 上・Ⅱ 272頁　下・Ⅱ 280頁	学部生にも大学院生にも使えるよう工夫され，内容の取捨選択がしやすく，種々の目的，異なる水準でもうまく使い分けられる．固体物理学の現象の記述と理論的解析による統一という著者の目標は完全に達成されている.
ド・ジャン　　久保亮五監修・高野・中西訳 **高分子の物理学** ──スケーリングを中心にして──　360頁	全く刷新された最近の高分子物理学の成果を，ド・ジャン自らが平明なスケーリング則の解説と共にまとめた労作である．むつかしい理論に立入らず，スケーリング則とその実験的検証を理解させるという立場を貫いている.

第 6 期

アンダーソン　松原武生訳 凝縮系物理学の基本概念 304頁	凝縮系物理学への深い洞察と透徹した哲学を世に問うた啓蒙書．単なる知識を伝える通常の教科書ではなく，学生にはこれから何を学ぶべきかの指針を，研究者には自己のいる現在点を認識させるまれにみる優れた指導書．
ディラック　喜多秀次訳 ヒルベルト空間のスピノル 120頁	有限 n 次元空間のスピノル理論をみごとな方法で展開した後 $n\to\infty$ を行う．多体フェルミ粒子系・場の量子論・粒子物理学に直接適用可能な形式である．無限次元に固有な事態の生起の指適とその物理的関連の論議を含む．
シュッツ　家・二間瀬・観山訳 物理学における幾何学的方法 328頁	本書は近年理論物理学において，極めて基礎的でかつ有効な数学的手法である微分幾何についての教科書である．概念を中心に分かり易く解説してあり，物理学への応用も示してある．
スタウファー　小田垣　孝訳 浸透理論の基礎 200頁	浸透理論は不規則系の中に作られるクラスターの性質を対象とした極めて汎用性の高い理論であり，本書はその最良の入門書である．スケーリング則や繰り込み群が駆使され，フラクタルや計算機実験にも触れられている．
メンスキー　菅野公男訳 径路の幾何学と素粒子論 504頁	径路の概念を用いて場の量子論の問題をはば広く論じることにより「径路」の概念が場の量子論にとって必要であるだけでなく自然でもあることを強調する．本訳書はソヴィエトで出版されるはずの改訂版に基づいている．
J.J.Sakurai　桜井明夫訳 現代の量子力学 上下 上 392頁　下 320頁	素粒子物理学の独創的理論家であった著者が，ＵＣＬＡでの多年の講義に基づき書き遺した現代的教科書．非相対論的量子力学の核心が，最近の理論・実験の発展に則し，新しい視点から明快かつ具体的に記述されている．
ジョージアイ　九後汰一郎訳 物理学におけるリー代数 ―アイソスピンから統一理論へ―　224頁	Glashow と共に $SU(5)$ に基づく素粒子の大統一理論を初めて提唱した著者が，その研究の苦闘の中で体得した豊富な実践的知識を込めて書いた，リー代数とその表現論のわかり易い解説書．
フォスター・ナイチンゲール　原　哲也訳 一般相対論入門 284頁	初学者には難解とも思える一般相対論の内容を，分り易く解き明かしてある．物質の存在が時空を歪め，その曲がりにより重力的現象が起因するという概念を平易，明快に解説．
ジーガー　山本恵一・林　真至・青木和徳訳 セミコンダクターの物理学 上・320頁　下・340頁	電子輸送現象にかなりの頁数を費やしており，企業の研究者にとっても最適である．さらに多くの図面により，物理現象の把握に役立つ．

第 7 期

ゲプハルト・クライ　好村滋洋訳 相転移と臨界現象 378頁	ランダウの相転移論から始まり，先年ノーベル賞の対象となったウイルソンのくりこみ群までを，あまり数式を用いず実験例との対応を明らかにするため，豊富な図表を用いて親しみ易く解説した現代的入門書．